

# Introducción a la Búsqueda Tabú <sup>\*</sup>

Belén Melián Batista, Fred Glover<sup>††</sup>

Dpto. de Estadística, I.O. y Computación  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática  
Universidad de La Laguna  
mbmelian@ull.es

<sup>††</sup>University of Colorado at Boulder  
Fred.Glover@Colorado.edu

## Resumen

La Búsqueda Tabú (*Tabu Search* - TS) es un procedimiento metaheurístico cuya característica distintiva es el uso de memoria adaptativa y de estrategias especiales de resolución de problemas. Su filosofía se basa en la explotación de diversas estrategias inteligentes para la resolución de problemas, basadas en procedimientos de aprendizaje. El marco de memoria adaptativa de TS explota la historia del proceso de resolución del problema haciendo referencia a cuatro dimensiones principales, consistentes en la propiedad de ser reciente, en frecuencia, en calidad, y en influencia. Para obtener un listado de los elementos a tener en consideración durante el diseño de un procedimiento de búsqueda tabú, véase el apéndice que aparece al final de este capítulo. Para estudiar en profundidad los puntos del mismo refiérase al capítulo completo, así como a las referencias indicadas.

## 1. Introducción

El término Búsqueda Tabú (*Tabu Search* - TS) fue introducido en 1986 por Fred Glover en el mismo artículo que introdujo el término metaheurística [5]. Los principios fundamentales de la búsqueda fueron elaborados en una serie de artículos de finales de los años 80 y principios de los 90, que fueron luego unificados en el libro “Tabu Search” en 1997 [8]. El destacado éxito de la búsqueda tabú para resolver problemas de optimización duros, especialmente aquellos que surgen en aplicaciones del mundo real, ha causado una explosión de nuevas aplicaciones durante los últimos años, que aparecen resumidas en [9].

La búsqueda tabú es una metaheurística que guía un procedimiento heurístico de búsqueda local en la búsqueda de optimalidad global. Su filosofía se basa en derivar y explotar una colección de estrategias inteligentes para la resolución de problemas, basadas en procedimientos implícitos y explícitos de aprendizaje. El marco de memoria adaptativa de la búsqueda tabú no sólo explota

---

<sup>\*</sup>Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (proyecto TIN2005-08404-C04-03 (70 % son fondos FEDER)) y por el Gobierno de Canarias (proyecto PI042004/088). La actividad desarrollada se enmarca dentro de los objetivos de la red RedHeur (proyecto TIN2004-20061-E).

la historia del proceso de resolución del problema, sino que también exige la creación de estructuras para hacer posible tal explotación. De esta forma, los elementos prohibidos en la búsqueda tabú reciben este estatus por la confianza en una memoria evolutiva, que permite alterar este estado en función del tiempo y las circunstancias. En este sentido es posible asumir que la búsqueda tabú está basada en determinados conceptos que unen los campos de inteligencia artificial y optimización.

Más particularmente, la búsqueda tabú está basada en la premisa de que para clasificar un procedimiento de resolución como inteligente, es necesario que éste incorpore *memoria adaptativa* y *exploración responsiva*. La memoria adaptativa en búsqueda tabú permite la implementación de procedimientos capaces de realizar la búsqueda en el espacio de soluciones eficaz y eficientemente. Dado que las decisiones locales están por tanto guiadas por información obtenida a lo largo del proceso de búsqueda, la búsqueda tabú contrasta con diseños que por contra confían en procesos semialeatorios, que implementan una forma de muestreo. La memoria adaptativa también contrasta con los típicos diseños de memoria rígidos tales como las estrategias de ramificación y acotación.

El énfasis en la exploración responsiva considerada en la búsqueda tabú deriva de la suposición de que una mala elección estratégica puede proporcionar más información que una buena elección realizada al azar, dado que una elección estratégica mala puede proporcionar pistas útiles sobre cómo guiar la búsqueda hacia zonas prometedoras. Por lo tanto, la exploración responsiva integra los principios básicos de la búsqueda inteligente; explota las características de las soluciones buenas a la vez que explora nuevas regiones prometedoras.

## 2. La estructura de la Búsqueda Tabú

### 2.1. Uso de memoria

Las estructuras de memoria de la búsqueda tabú funcionan mediante referencia a cuatro dimensiones principales, consistentes en la propiedad de ser reciente, en frecuencia, en calidad, y en influencia. Las memorias basadas en lo reciente y en frecuencia se complementan la una a la otra para lograr el balance entre intensificación y diversificación que todo proceso de búsqueda heurística debe poseer. Discutiremos con más detalle los aspectos referentes a estas dos primeras dimensiones de memoria a lo largo de este capítulo. La dimensión de *calidad* hace referencia a la habilidad para diferenciar la bondad de las soluciones visitadas a lo largo del proceso de búsqueda. De esta forma, la memoria puede ser utilizada para la identificación de elementos comunes a soluciones buenas o a ciertos caminos que conducen a ellas. La calidad constituye un fundamento para el aprendizaje basado en incentivos, donde se refuerzan las acciones que conducen a buenas soluciones y se penalizan aquellas que, por contra, conducen a soluciones pobres. La flexibilidad de las estructuras de memoria mencionadas hasta el momento permiten guiar la búsqueda en un entorno multi-objetivo, dado que se determina la bondad de una dirección de búsqueda particular mediante más de una función. Por último, la cuarta dimensión de memoria, referida a la *influencia*, considera el impacto de las decisiones tomadas durante la búsqueda, no sólo en lo referente a la calidad de las soluciones, sino también en lo referente a la estructura de las mismas. Este último uso de memoria es una característica importante de la búsqueda tabú que con frecuencia se olvida, pero que debería ser considerada incluso en los diseños más simples como veremos a lo largo de este capítulo.

El uso de memoria en la búsqueda tabú es tanto *explícita* como *implícita*. En el primer caso,

se almacenan en memoria soluciones completas, generalmente soluciones élite visitadas durante la búsqueda, mientras que en el segundo caso, se almacena información sobre determinados atributos de las soluciones que cambian al pasar de una solución a otra. Aunque, en algunos casos, la memoria explícita es usada para evitar visitar soluciones más de una vez, esta aplicación es limitada dado que es necesario la implementación de estructuras de memoria muy eficientes para evitar requerimientos de memoria excesivos. De cualquier manera, estos dos tipos de memoria son complementarios, puesto que la memoria explícita permite expandir los entornos de búsqueda usados durante un proceso de búsqueda local mediante la inclusión de soluciones élite, mientras que la memoria basada en atributos los reduce prohibiendo determinados movimientos.

## 2.2. Intensificación y Diversificación

Las estrategias de intensificación y diversificación constituyen dos elementos altamente importantes en un proceso de búsqueda tabú. Las estrategias de intensificación se basan en la modificación de reglas de selección para favorecer la elección de buenas combinaciones de movimientos y características de soluciones encontradas. Esto implica que es necesario identificar un conjunto de soluciones élite cuyos buenos atributos puedan ser incorporados a nuevas soluciones creadas. La pertenencia al conjunto de soluciones élite se determina generalmente atendiendo a los valores de la función objetivo comparados con la mejor solución obtenida hasta el momento.

Por otro lado, las estrategias de diversificación tratan de conducir la búsqueda a zonas del espacio de soluciones no visitadas anteriormente y generar nuevas soluciones que difieran significativamente de las ya evaluadas.

## 2.3. Un ejemplo ilustrativo

Los problemas de permutaciones son una clase importante de problemas en optimización, y ofrecen un modo muy útil para demostrar algunas de las consideraciones que deben ser tratadas en el dominio combinatorio. Las instancias clásicas de problemas de permutaciones incluyen los problemas del viajante de comercio, asignación cuadrática, secuenciación de la producción, y una variedad de problemas de diseño. Como base para la ilustración, consideremos el problema de secuenciación de tareas en una única máquina. El objetivo de este problema es encontrar un orden para secuenciar las tareas en la máquina de tal forma que se minimice el retraso total en la ejecución de las tareas. Cada tarea  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , tiene asignados un tiempo de procesamiento  $p_j$  y un día de finalización  $d_j$ . De forma adicional, se podría considerar un valor de penalización por retardo en la finalización de las tareas que dependería de la tarea considerada,  $w_j$ . Por tanto, la función a minimizar se expresa como

$$F = \sum_{j=1}^n w_j [C_j - d_j]^+,$$

donde  $C_j$  es el tiempo de finalización de la tarea  $j$  y  $[C_j - d_j]^+ = \max\{0, C_j - d_j\}$ . El tiempo de finalización de una tarea  $j$ ,  $C_j$ , es igual al tiempo de procesamiento de la tarea  $j$  más la suma de los tiempos de procesamiento de todas las tareas que se realizan antes que  $j$ .

El problema consiste en determinar el orden de secuenciación de las tareas que minimiza el

valor de la función objetivo  $F$ . Una secuenciación de las tareas, que constituye una permutación, define completamente a una solución.

Nos centramos, por tanto, en el problema de secuenciación de tareas en una única máquina para introducir e ilustrar los componentes básicos de la búsqueda tabú. Supongamos que se consideran 6 tareas para su secuenciación en la máquina. A modo de ilustración, supongamos que este problema de 6 tareas tiene tiempos de procesamiento dados por  $(5, 8, 2, 6, 10, 3)$ , días de terminación especificados por  $(9, 10, 16, 7, 20, 23)$ , y penalizaciones por retraso  $w_j = 1$  para  $j = 1, 2, \dots, 6$ . Deseamos diseñar un método capaz de encontrar una solución óptima o cercana a la óptima explorando sólo un pequeño subconjunto de todas las permutaciones posibles.

Primero asumimos que puede construirse una solución inicial para este problema de alguna manera inteligente, es decir, tomando ventaja de la estructura específica del problema. Supongamos que la solución inicial de nuestro problema es la que aparece en la Figura 1.

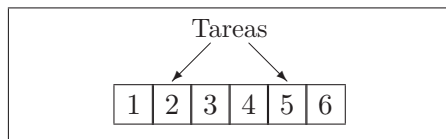


Figura 1: Permutación inicial

La ordenación de la Figura 1 especifica que la tarea 1 se realiza en primer lugar, seguida por la tarea 2, etc. El valor de la función objetivo para esta solución es 39. Los métodos TS operan bajo el supuesto de que se puede construir un entorno para identificar “soluciones adyacentes” que puedan ser alcanzadas desde la solución actual. Los intercambios por pares son frecuentemente usados para definir entornos en problemas de permutaciones, identificando movimientos que conducen una solución a la siguiente. En nuestro problema, un intercambio cambia la posición de dos tareas como se ilustra en la Figura 2. Por tanto, el entorno completo de una solución en nuestro ejemplo ilustrativo está formado por 15 soluciones adyacentes que pueden ser obtenidas a partir de estos intercambios tal como muestra el Cuadro 1.

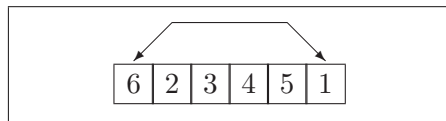


Figura 2: Intercambio de las tareas 1 y 6

Tal como observamos en el Cuadro 1, asociado a cada intercambio hay un valor de movimiento, que representa el cambio sobre el valor de la función objetivo como resultado del intercambio realizado. Los valores de los movimientos generalmente proporcionan una base fundamental para evaluar la calidad de los mismos, aunque también pueden ser importantes otros criterios. Un mecanismo principal para explotar la memoria en la búsqueda tabú es clasificar un subconjunto de movimientos en un entorno como prohibidos (o tabú). La clasificación depende de la historia de la búsqueda, determinada mediante lo reciente o frecuente que ciertos movimientos o componentes de soluciones, llamados *atributos*, han participado en la generación de soluciones pasadas. Por ejemplo, un atributo de un movimiento es la identidad del par de elementos que cambian posiciones (en este caso, las dos tareas intercambiadas). Como base para evitar la búsqueda desde combinaciones de intercambio

Tareas		$F$	valor del movimiento	$abs(d_i - d_j)$
$i$	$j$			
1	2	40	1	9
1	3	42	3	7
1	4	38	-1	2
1	5	64	25	11
1	6	47	8	14
2	3	41	2	6
2	4	37	-2	3
2	5	49	10	10
2	6	39	0	13
3	4	42	3	9
3	5	54	15	4
3	6	48	9	7
4	5	43	4	13
4	6	38	-1	16
5	6	32	-7	3

Cuadro 1: Entorno de Intercambios

repetidas usadas en el pasado reciente, invirtiendo potencialmente los efectos de movimientos anteriores por intercambios que podrían devolver a posiciones previas, clasificaremos como tabú todos los intercambios compuestos por cualquiera de los pares de tareas más recientes; en este caso, para propósitos ilustrativos, las tres más recientes. Esto significa que un par de tareas será tabú durante un período de 3 iteraciones. Dado que intercambiar las tareas 2 y 5 es lo mismo que intercambiar las tareas 5 y 2, ambos intercambios pueden ser representados por el par  $(2, 5)$ . Por lo tanto, se puede usar una estructura de datos como la usada en la Figura 3.

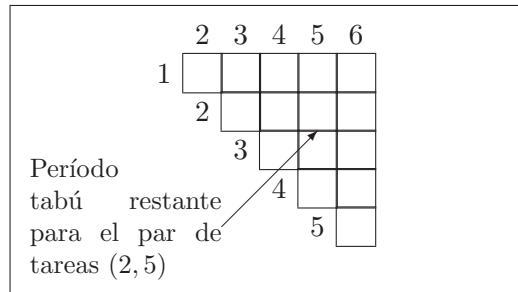


Figura 3: Estructura de Datos Tabú

Cada celda de la estructura de la Figura 3 contiene el número de iteraciones restantes hasta que las capas correspondientes puedan nuevamente intercambiar posiciones. Por tanto, si la celda  $(2, 5)$  tuviera un valor de cero, entonces las tareas 2 y 5 estarían disponibles para intercambiar posiciones. Por otro lado, si la celda tuviera un valor de 2, entonces las tareas no podrían intercambiar posiciones durante las dos iteraciones siguientes (es decir, un intercambio que cambia estas tareas es clasificado como tabú).

Para implementar restricciones tabú, debe tenerse en cuenta una excepción importante: las restricciones tabú no son inviolables bajo cualquier circunstancia. Cuando un movimiento tabú resultara en una solución mejor que cualquiera visitada hasta ese momento, su clasificación tabú podría ser reemplazada. Una condición que permite que ocurra tal reemplazo se llama *criterio de*

*aspiración.* A continuación se muestran 7 iteraciones del procedimiento de búsqueda tabú básico, que usa la restricción tabú de tareas emparejadas.

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos																																																								
<table border="1"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>3</td></tr> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>5</td></tr> <tr><td>6</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <p><math>F = 39</math></p>	2	3	4	5	6	1					2					3					4					5					6					<table border="1"> <tr><td>5, 6</td><td>-7</td><td>*</td></tr> <tr><td>2, 4</td><td>-2</td><td></td></tr> <tr><td>1, 4</td><td>-1</td><td></td></tr> <tr><td>4, 6</td><td>-1</td><td></td></tr> <tr><td>2, 6</td><td>0</td><td></td></tr> </table>	5, 6	-7	*	2, 4	-2		1, 4	-1		4, 6	-1		2, 6	0	
1																																																										
2																																																										
3																																																										
4																																																										
5																																																										
6																																																										
2	3	4	5	6																																																						
1																																																										
2																																																										
3																																																										
4																																																										
5																																																										
6																																																										
5, 6	-7	*																																																								
2, 4	-2																																																									
1, 4	-1																																																									
4, 6	-1																																																									
2, 6	0																																																									

Figura 4: Iteración 0

La solución de partida de la Figura 4 tiene un valor de la función objetivo  $F = 39$ , y la estructura de los datos tabú está inicialmente vacía, es decir, está llena de ceros, indicando que ningún movimiento está clasificado como tabú al comienzo de la búsqueda. Después de evaluar los movimientos de intercambio de candidatos, se muestran en la tabla para la iteración 0 los cinco primeros movimientos (en términos de valores de movimiento). Para minimizar localmente el retraso total en la ejecución de las tareas, intercambiamos las posiciones de las tareas 5 y 6, como se indica a través del asterisco en la Figura 4. El decremento total de este movimiento es igual a 7 unidades, con lo que el valor de la función objetivo pasa a ser  $F = 32$ .

Solución tabú	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos																																																								
<table border="1"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>3</td></tr> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>6</td></tr> <tr><td>5</td></tr> </table>	1	2	3	4	6	5	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> </table> <p><math>F = 32</math></p>	2	3	4	5	6	1					2					3					4					5					6					<table border="1"> <tr><td>2, 4</td><td>-2</td><td>*</td></tr> <tr><td>1, 4</td><td>-1</td><td></td></tr> <tr><td>1, 2</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>2, 3</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>4, 6</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	2, 4	-2	*	1, 4	-1		1, 2	1		2, 3	2		4, 6	2	
1																																																										
2																																																										
3																																																										
4																																																										
6																																																										
5																																																										
2	3	4	5	6																																																						
1																																																										
2																																																										
3																																																										
4																																																										
5																																																										
6																																																										
2, 4	-2	*																																																								
1, 4	-1																																																									
1, 2	1																																																									
2, 3	2																																																									
4, 6	2																																																									

Figura 5: Iteración 1

La nueva solución actual tiene un valor de función objetivo  $F = 32$  (es decir, el retraso total anterior más el valor del movimiento seleccionado). La estructura tabú de la Figura 5 ahora muestra que el intercambio de las posiciones de las tareas 5 y 6 se prohíbe durante 3 iteraciones. El movimiento que proporciona la mayor mejora en este paso es el intercambio de las tareas 2 y 4 con un decremento de 2 unidades.

La nueva solución actual tiene un retraso en la ejecución de las tareas de 30. En esta iteración se clasifican como tabú dos intercambios como se indica mediante las entradas distintas de cero en la estructura tabú de la Figura 6. Note que la entrada (5, 6) ha disminuido de 3 a 2, indicando que su período tabú original de 3 ahora tiene 2 iteraciones restantes. En este momento, el intercambio

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos																																																			
<table border="1"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>3</td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>6</td></tr> <tr><td>5</td></tr> </table>	1	4	3	2	6	5	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td>2</td></tr> </table> <p><math>F = 30</math></p>	2	3	4	5	6	1					2		3			3					4					5				2	<table border="1"> <tr><td>1, 4</td><td>-2</td><td>*</td></tr> <tr><td>1, 3</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>3, 4</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>2, 4</td><td>2</td><td><math>T</math></td></tr> <tr><td>2, 6</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	1, 4	-2	*	1, 3	1		3, 4	2		2, 4	2	$T$	2, 6	2	
1																																																					
4																																																					
3																																																					
2																																																					
6																																																					
5																																																					
2	3	4	5	6																																																	
1																																																					
2		3																																																			
3																																																					
4																																																					
5				2																																																	
1, 4	-2	*																																																			
1, 3	1																																																				
3, 4	2																																																				
2, 4	2	$T$																																																			
2, 6	2																																																				

Figura 6: Iteración 2

de las tareas 1 y 4 conduce a una nueva mejora en el valor de la función objetivo, disminuyendo en dos unidades. La Figura 7 muestra ahora 3 movimientos clasificados como tabú.

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos																																																			
<table border="1"> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>3</td></tr> <tr><td>2</td></tr> <tr><td>6</td></tr> <tr><td>5</td></tr> </table>	4	1	3	2	6	5	<table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td></tr> </table> <p><math>F = 28</math></p>	2	3	4	5	6	1		3			2		2			3					4					5				1	<table border="1"> <tr><td>1, 4</td><td>2</td><td><math>T</math></td></tr> <tr><td>1, 3</td><td>2</td><td>*</td></tr> <tr><td>2, 6</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>1, 2</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>2, 3</td><td>3</td><td></td></tr> </table>	1, 4	2	$T$	1, 3	2	*	2, 6	2		1, 2	3		2, 3	3	
4																																																					
1																																																					
3																																																					
2																																																					
6																																																					
5																																																					
2	3	4	5	6																																																	
1		3																																																			
2		2																																																			
3																																																					
4																																																					
5				1																																																	
1, 4	2	$T$																																																			
1, 3	2	*																																																			
2, 6	2																																																				
1, 2	3																																																				
2, 3	3																																																				

Figura 7: Iteración 3

En este momento, ninguno de los candidatos tiene un valor de movimiento negativo. Por lo tanto, se realiza un movimiento de no mejora. Dado que el primer movimiento de no mejora es el inverso del movimiento ejecutado en la iteración anterior, que está clasificado como tabú (indicado por  $T$ ), este movimiento no se selecciona. Entonces se elige el intercambio de las tareas 1 y 3, como se indica en la Figura 7.

Siguiendo el mismo procedimiento indicado hasta este momento, se realizarían las siguientes iteraciones mostradas en las Figuras 8 a 11. En estas últimas iteraciones observamos que se realizan movimientos de no mejora para escapar de la solución con valor objetivo  $F = 28$ , que parece ser un óptimo local.

Si durante el proceso explicado hubiera habido algún movimiento clasificado como tabú que condujera a una solución con un retraso en la finalización de las tareas menor que el de la mejor solución encontrada hasta el momento, se podría haber usado un criterio de aspiración. En este caso, hubiéramos usado el criterio de aspiración por objetivo, que selecciona como solución actual la que tenga un menor valor objetivo, independientemente de que los movimientos requeridos para alcanzarla sean tabú.

En algunas situaciones, puede ser deseable incrementar el porcentaje de movimientos disponibles

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos
4	2 3 4 5 6	Valor de movimiento
3	1 <input type="checkbox"/> 3 2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1, 3 -2 T
1	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> 1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3, 4 1 *
2	3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1, 4 2 T
6	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2, 6 2
5	5 <input type="checkbox"/>	1, 2 3
	$F = 30$	

Figura 8: Iteración 4

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos
3	2 3 4 5 6	Valor de movimiento
4	1 <input type="checkbox"/> 2 1 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	3, 4 -1 T
1	2 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1, 3 -1 T
2	3 <input type="checkbox"/> 3 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	1, 4 1 T
6	4 <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	2, 6 2 *
5	5 <input type="checkbox"/>	1, 2 3
	$F = 31$	

Figura 9: Iteración 5

que reciben una clasificación tabú. Además, a pesar del tipo de restricción seleccionado, a menudo se obtienen mejores resultados por los plazos tabú que varían dinámicamente, como se describe con posterioridad en este capítulo.

*Valores de Movimiento y Estrategia de Lista de Candidatos.* Dado que la búsqueda tabú selecciona agresivamente los mejores movimientos admisibles (donde el significado de mejor es afectado por la clasificación tabú y otros elementos a ser indicados), debe examinar y comparar un número de opciones de movimiento. Para muchos problemas, sólo una porción de los valores de movimiento cambia de una iteración a otra, y a menudo estos valores cambiados pueden ser separados y actualizados muy rápidamente. Este elemento de mantener actualizaciones eficientes es muy importante y en ocasiones ignorado. Por ejemplo, en la presente ilustración puede ser útil almacenar una tabla  $valor\_movimiento(j,k)$ , que almacena el actual valor del movimiento para intercambiar las tareas  $j$  y  $k$ . Entonces cuando se ejecuta un movimiento, una parte relativamente pequeña de esta tabla (formada por los valores que cambian) puede ser modificada rápidamente, y la tabla actualizada puede ser consultada para identificar movimientos que se convierten en los nuevos candidatos superiores.

Si atendemos al Cuadro 1, observamos claramente que hay una variación muy grande en la calidad de cada intercambio en el entorno definido para una solución. Por lo tanto, parece útil eliminar algunas soluciones de calidad baja antes de evaluar su valor de movimiento mediante un filtro. En nuestro ejemplo ilustrativo de secuenciación de tareas en una máquina, podemos implementar una regla que elimine aquellos movimientos para los que el valor absoluto de la diferencia de los días



Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos																																			
3	2 3 4 5 6	Valor de movimiento																																			
4	1 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td>3</td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr> </table>		1			2			3		3	2				4					5	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>2, 6</td><td>-2</td><td>T</td></tr> <tr><td>3, 4</td><td>-1</td><td>T</td></tr> <tr><td>1, 3</td><td>-1</td><td>T</td></tr> <tr><td>1, 4</td><td>1</td><td>*</td></tr> <tr><td>3, 6</td><td>2</td><td></td></tr> </table>	2, 6	-2	T	3, 4	-1	T	1, 3	-1	T	1, 4	1	*	3, 6	2	
	1																																				
2			3																																		
	3	2																																			
		4																																			
			5																																		
2, 6	-2	T																																			
3, 4	-1	T																																			
1, 3	-1	T																																			
1, 4	1	*																																			
3, 6	2																																				
1																																					
6																																					
2																																					
5																																					
	$F = 33$																																				

Figura 10: Iteración 6

Solución actual	Estructura tabú	Primeros 5 candidatos																																			
3	2 3 4 5 6	Valor de movimiento																																			
1	1 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td></td><td>3</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr> </table>			3		2			2		3	1				4					5	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>3, 4</td><td>-4</td><td>T</td></tr> <tr><td>2, 6</td><td>-2</td><td>T</td></tr> <tr><td>1, 4</td><td>-1</td><td>T</td></tr> <tr><td>1, 3</td><td>0</td><td>*</td></tr> <tr><td>3, 6</td><td>1</td><td></td></tr> </table>	3, 4	-4	T	2, 6	-2	T	1, 4	-1	T	1, 3	0	*	3, 6	1	
		3																																			
2			2																																		
	3	1																																			
		4																																			
			5																																		
3, 4	-4	T																																			
2, 6	-2	T																																			
1, 4	-1	T																																			
1, 3	0	*																																			
3, 6	1																																				
4																																					
6																																					
2																																					
5																																					
	$F = 34$																																				

Figura 11: Iteración 7

de terminación sea mayor que 3. De esta forma, en los datos del Cuadro 1, evaluaríamos tan sólo 3 movimientos en vez de 15, generando así una lista de candidatos.

*Estructuras de Memoria Tabú Complementarias.*

El complemento de *memoria basada en lo reciente* a la *memoria basada en frecuencia* añade una componente que típicamente opera sobre un horizonte más largo. En nuestro ejemplo ilustrativo, si continuamos con la traza anterior utilizando únicamente información basada en las 3 iteraciones más recientes, observamos que se produce un ciclado de las soluciones. Para ilustrar una de las aplicaciones útiles de largo período de memoria basada en frecuencia, suponemos que han sido ejecutadas 14 iteraciones TS, y que el número de veces que cada par de tareas ha sido intercambiado se guarda en una estructura de datos tabú expandida (Figura 12). La diagonal inferior de esta estructura ahora contiene los contadores de frecuencia.

En la iteración actual (iteración 15), la memoria basada en lo reciente indica que los últimos tres pares de tareas intercambiados fueron (1, 4), (2, 6), y (3, 4). Los contadores de frecuencia muestran la distribución de movimientos a través de las 14 primeras iteraciones. Usamos estos contadores para diversificar la búsqueda, conduciéndola a nuevas regiones y rompiendo el ciclado. Nuestro uso de información de frecuencia penalizará movimientos de no mejora mediante la asignación de una penalización mayor a intercambios de pares de tareas con mayores contadores de frecuencia. (Típicamente, estos contadores serían normalizados, por ejemplo mediante la división por el número total de iteraciones o su máximo valor). Esto se ilustra en el ejemplo presente simplemente sumando

Solución actual	Estructura tabú (Reciente)						Primeros 5 candidatos
	1	2	3	4	5	6	Valor
3							
1	1			3			3,4 -4 - T
4	2					2	2,6 -2 - T
6	3	3		1			1,4 -1 - T
2	4	3	1	3			1,3 0 3
5	5						3,6 1 1 *
6		3			1		Valor Penalizado

$F = 34$  (Frecuente)

Figura 12: Iteración 15

el valor de frecuencia al valor del movimiento asociado.

La lista de candidatos superiores para la iteración 15 muestra que el movimiento de máxima mejora es el intercambio (3, 4), pero dado que este par tiene un período tabú residual, es clasificado tabú. Lo mismo sucede con los movimientos (2, 6) y (1, 4). El movimiento (1, 3) tiene un valor de 0, y pudiera ser en otro caso el siguiente preferido, excepto si sus tareas asociadas han sido intercambiadas frecuentemente durante la historia de la búsqueda (de hecho, más frecuentemente que cualquier otro par de tareas). Por lo tanto, el movimiento es penalizado fuertemente y pierde su atractivo. El intercambio de las tareas 3 y 6 es, por tanto, seleccionado como el mejor movimiento en la iteración actual.

La estrategia de imponer penalizaciones bajo condiciones particulares se usa para preservar la agresividad de la búsqueda. Las funciones de penalización en general se diseñan para justificar no sólo frecuencias sino también valores de movimientos y ciertas medidas de influencia.

Además, las frecuencias definidas sobre diferentes subconjuntos de soluciones anteriores, particularmente subconjuntos de soluciones élite formados por óptimos locales de alta calidad, dan lugar a estrategias complementarias llamadas estrategias de intensificación. Las estrategias de intensificación y diversificación interactúan para proporcionar puntos de apoyo fundamentales de memoria de largo plazo en búsqueda tabú. El modo en el que tales elementos son capaces de crear métodos realzados de la búsqueda, extendiendo el enfoque simplificado del ejemplo precedente, se elabora en las siguientes secciones.

### 3. Fundamentos de la Búsqueda Tabú: Memoria a Corto Plazo

Antes de comenzar a detallar los fundamentos de la búsqueda tabú, es necesario disponer de algunas definiciones y convenciones básicas. Expresemos un problema de optimización matemática de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c(x) \\ & \text{Sujeto a} \\ & x \in X \end{aligned}$$

La función objetivo  $c(x)$  puede ser lineal o no lineal, y la condición  $x \in X$  resume las restricciones impuestas sobre el vector  $x$ . Estas restricciones pueden incluir desigualdades lineales o no lineales, y pueden forzar a algunas o a todas las componentes de  $x$  a tomar valores discretos.

En muchas aplicaciones de optimización combinatoria, el problema de interés no es explícitamente formulado como lo hemos mostrado. En estos casos, esta formulación puede ser concebida como un código para otra formulación. El requerimiento  $x \in X$ , por ejemplo, puede especificar condiciones lógicas o interconexiones que sería difícil formular matemáticamente, y que es mejor dejarlas como estipulaciones verbales (por ejemplo, en forma de reglas). En ocasiones, en estas instancias, las variables son simplemente códigos para condiciones o asignaciones que reciben un valor de uno para codificar la asignación de un elemento  $u$  a una posición  $v$ , y que recibe un valor de cero para indicar que no se produce tal asignación.

### 3.1. Búsqueda por entorno

La búsqueda tabú puede ser caracterizada mediante referencia a la búsqueda por entornos, aunque es importante destacar que la búsqueda en el entorno tiene un significado más amplio en búsqueda tabú que en algunas otras estrategias de la literatura de las metaheurísticas. Una representación de búsqueda por entorno identifica, para cada solución  $x \in X$ , un conjunto asociado de vecinos,  $N(x) \subset X$ , llamado entorno de  $x$ . En búsqueda tabú, los entornos normalmente se asumen simétricos, es decir,  $x'$  es un vecino de  $x$  si y sólo si  $x$  es un vecino de  $x'$ . Los pasos en la búsqueda por entorno se muestran en la Figura 13.

---

#### Método de Búsqueda en el Entorno:

**Paso 1** (Inicialización).

- (A) Seleccionar una solución de arranque  $x_{Actual} \in X$ .
- (B) Almacenar la mejor solución actual conocida haciendo  $x_{Mejor} = x_{Actual}$  y definiendo  $MejorCoste = c(x_{Mejor})$ .

**Paso 2** (Elección y finalización).

Elegir una solución  $x_{Siguiente} \in N(x_{Actual})$ . Si los criterios de elección empleados no pueden ser satisfechos por ningún miembro de  $N(x_{Actual})$ , o si se aplican otros criterios de parada, entonces el método para.

**Paso 3** (Actualización).

Rehacer  $x_{Actual} = x_{Siguiente}$ , y si  $c(x_{Actual}) < MejorCoste$ , ejecutar el paso 1(B). Volver al paso 2.

---

Figura 13: Método de Búsqueda en el Entorno.

### 3.2. Memoria y Clasificaciones Tabú

La idea de explotar ciertas formas de memoria adaptativa para controlar el proceso de la búsqueda es el tema central subyacente en la búsqueda tabú. Una diferencia importante que surge en búsqueda tabú es la distinción entre memoria a corto plazo y memoria a largo plazo. Cada uno de estos tipos de memoria va acompañado de sus propias estrategias especiales. Sin embargo, el efecto de ambos tipos de memoria puede verse como la modificación de la estructura de entorno de la solución actual. El efecto de tal memoria puede ser previsto estipulando que la búsqueda tabú mantiene una historia selectiva  $H$  de los estados encontrados durante la búsqueda, y reemplaza  $N(xActual)$  por un entorno modificado que puede ser denotado como  $N(H, xActual)$ . La historia determina, por tanto, qué soluciones pueden ser alcanzadas por un movimiento desde la solución actual, seleccionando  $xSiguiente$  de  $N(H, xActual)$ .

En las estrategias TS basadas en consideraciones de período corto o memoria a corto plazo,  $N(H, xActual)$  es generalmente un subconjunto de  $N(xActual)$ , y la clasificación tabú sirve para identificar elementos de  $N(xActual)$  excluidos de  $N(H, xActual)$ . En las estrategias de período intermedio y largo,  $N(H, xActual)$  puede contener soluciones que no estén en  $N(xActual)$ , generalmente soluciones élite seleccionadas (óptimos locales de alta calidad), encontradas durante el proceso de búsqueda. Estas soluciones élite se identifican típicamente como elementos de un grupo local en estrategias de intensificación de período intermedio, y como elementos de diferentes grupos en estrategias de diversificación de período largo o largo plazo. Además, las componentes de las soluciones élite, en contraste con las soluciones en sí mismas, se incluyen entre los elementos que pueden ser conservados e integrados para proporcionar entradas al proceso de búsqueda.

Un proceso de búsqueda local basado únicamente en estrategias a corto plazo puede permitir que una solución sea visitada más de una vez, pero es probable que el entorno reducido sea diferente en cada una de las exploraciones. Cuando la memoria a corto plazo va acompañada de memoria a largo plazo, se reduce en gran medida la probabilidad de tomar decisiones que visiten repetidamente sólo un subconjunto limitado del espacio de soluciones.

La búsqueda tabú también usa historia para generar una función de evaluación modificada de las soluciones accesibles. Formalmente, podemos expresarlo diciendo que TS reemplaza la función objetivo  $c(x)$  por una función  $c(H, x)$ , que tiene el propósito de evaluar la calidad relativa de las soluciones accesibles actualmente, en función de la historia del proceso. Esta función modificada es relevante porque TS usa criterios de decisión agresivos que buscan un mejor  $xSiguiente$ , es decir, que proporcionan un mejor valor de  $c(H, xSiguiente)$ , sobre un conjunto candidato de  $N(H, xAhora)$ .

Para problemas grandes, donde  $N(H, xActual)$  puede tener muchos elementos, o para problemas donde estos elementos pueden ser costosos de examinar, la orientación de elección agresiva de TS hace altamente importante aislar un subconjunto candidato del entorno, y examinar este subconjunto en vez del entorno completo. Esto puede realizarse en etapas, permitiendo que el subconjunto candidato se extienda si no se encuentran alternativas que satisfagan los niveles de aspiración. Debido a la importancia del papel del subconjunto candidato, nos referimos a este subconjunto explícitamente por la notación  $Candidato\_N(xActual)$ . Entonces, el procedimiento de búsqueda tabú puede ser expresado como se muestra en la Figura 14.

La esencia del método de búsqueda tabú depende de cómo se defina y utilice la historia almacenada  $H$ , y de cómo se determinen el entorno candidato  $Candidato\_N(xActual)$  y la función evaluación

---

## Método de Búsqueda Tabú:

### Paso 1 (Inicialización).

Comenzar con la misma inicialización usada para la Búsqueda por Entorno, y empezar con el expediente de la historia  $H$  vacío.

### Paso 2 (Elección y finalización).

Determinar  $Candidato\_N(xActual)$  como un subconjunto de  $N(H, xActual)$ . Seleccionar  $xSiguiente$  de  $Candidato\_N(xActual)$  para minimizar  $c(H, x)$  sobre este conjunto ( $xSiguiente$  es llamado elemento de evaluación mayor de  $Candidato\_N(xActual)$ ). Terminar mediante un criterio de parada seleccionado.

### Paso 3 (Actualización).

Ejecutar la actualización por el Método de Búsqueda en el Entorno, y actualizar el expediente de la historia  $H$ .

---

Figura 14: Método de Búsqueda Tabú.

$c(H, x)$ . En los casos más simples, que suponen gran parte de las implementaciones que aparecen en la literatura, podemos considerar que  $Candidato\_N(xActual)$  constituye todo  $N(H, xActual)$ , y que  $c(H, x) = c(x)$ , ignorando enfoques de investigación del entorno y la memoria a largo plazo que introduce soluciones élite en la determinación de los movimientos. Sin embargo, las estrategias de listas de candidatos que reducen el espacio de movimientos considerados son enormemente importantes para una implementación efectiva [8].

Las funciones de memoria a corto plazo constituyen uno de los elementos más importantes de la metodología de búsqueda tabú. Estas funciones aportan a la búsqueda la oportunidad de continuar más allá de la optimalidad local permitiendo la ejecución de movimientos de no mejora ligados a la modificación de la estructura de entorno de las siguientes soluciones. Sin embargo, en vez de almacenar soluciones completas, como en el enfoque de memoria explícita, estas estructuras de memoria generalmente están basadas en el almacenamiento de atributos (*memoria atributiva*). Además, la memoria a corto plazo suele estar basada en la historia reciente de la trayectoria de búsqueda.

### 3.2.1. Memoria Atributiva

Un atributo de un movimiento de  $xActual$  a  $xSiguiente$ , o de un movimiento ensayo de  $xActual$  a una solución tentativa  $xEnsayo$ , puede abarcar cualquier aspecto que cambie como resultado del movimiento. Algunos tipos naturales de atributos aparecen en la Figura 15.

Un movimiento simple evidentemente puede dar lugar a atributos múltiples. Por ejemplo, un movimiento que cambia los valores de dos variables simultáneamente puede dar lugar a cada uno de los tres atributos (A1), (A2), y (A3), además de otros atributos de la forma indicada.

Cuando nos referimos a asignar valores alternativos a una variable seleccionada  $x_j$  de  $x$ , y particularmente a asignar valores 0 y 1 a una variable binaria, entenderemos que esto puede referirse a una variedad de operaciones tales como añadir o eliminar aristas de un grafo, asignar o eliminar

---

### Atributos de Movimiento Ilustrativos

para un Movimiento  $x_{Actual}$  a  $x_{Ensayo}$ :

- (A1) Cambio de una variable seleccionada  $x_j$  de 0 a 1.
  - (A2) Cambio de una variable seleccionada  $x_k$  de 1 a 0.
  - (A3) El cambio combinado de (A1) y (A2) tomados juntos.
  - (A4) Cambio de una función  $g(x_{Actual})$  a  $g(x_{Ensayo})$  (donde  $g$  puede representar una función que ocurre naturalmente en la formulación del problema o una función que es creada estratégicamente).
- 

Figura 15: Atributos de Movimiento Ilustrativos.

un servicio de una localización particular, cambiar la posición de procesamiento de un trabajo sobre una máquina, y así sucesivamente.

Los atributos de movimientos almacenados son a menudo usados en búsqueda tabú para imponer restricciones, que evitan que sean elegidos ciertos movimientos que invertirían los cambios representados por estos atributos. Más precisamente, cuando se ejecuta un movimiento de  $x_{Actual}$  a  $x_{Siguiente}$  que contiene un atributo  $e$ , se mantiene un registro para el atributo inverso que denotamos por  $\bar{e}$ , para prevenir que ocurra un movimiento que contenga algún subconjunto de tales atributos inversos. En la Figura 16 se muestran algunos tipos de restricciones tabú empleadas frecuentemente.

---

### Restricciones Tabú Ilustrativas.

Un movimiento es tabú si:

- (R1)  $x_j$  cambia de 1 a 0 (donde  $x_j$  cambió previamente de 0 a 1).
  - (R2)  $x_k$  cambia de 0 a 1 (donde  $x_k$  cambió previamente de 1 a 0).
  - (R3) Ocurre al menos una de las restricciones (R1) y (R2). (Esta condición es más restrictiva que (R1) o (R2) separadamente, es decir, hace más movimientos tabú).
  - (R4) Ocurren (R1) y (R2). (Esta condición es menos restrictiva que (R1) o (R2) por separado, es decir, hace menos movimientos tabú).
- 

Figura 16: Restricciones Tabú Ilustrativas.

### 3.3. Memoria basada en lo Reciente

La memoria a corto plazo más utilizada generalmente en la literatura almacena los atributos de las soluciones que han cambiado en el pasado reciente. Este tipo de memoria a corto plazo se denomina *memoria basada en lo reciente*. La forma más habitual de explotar este tipo de memoria

es etiquetando los atributos seleccionados de soluciones visitadas recientemente como tabú-activos. Se considera que un atributo es *tabú-activo* cuando su atributo inverso asociado ha ocurrido dentro de un intervalo estipulado de lo reciente. Un atributo que no es tabú-activo se llama tabú-inactivo. De este forma, aquellas soluciones que contengan atributos tabú-activos, o combinaciones particulares de los mismos, se convierten en soluciones tabú o prohibidas. Tal como hemos mencionado anteriormente, esto impide que se visiten soluciones ya evaluadas en el pasado reciente.

La condición de ser tabú-activo o tabú-inactivo se llama el *estado tabú* de un atributo. En algunas ocasiones un atributo se llama tabú o no tabú para indicar que es tabú-activo o tabú-inactivo. Es importante tener en cuenta que un movimiento puede contener atributos tabú-activos, pero no ser tabú en sí mismo si estos atributos no son del número o clase correctas para activar una restricción tabú.

Aunque las restricciones tabú más comunes, cuyos atributos son los inversos de aquellos que definen las restricciones, tienen generalmente el objetivo de prevenir el ciclado, es necesario precisar que el objetivo final de la búsqueda tabú no es evitar ciclos. Es importante tener en cuenta que en algunas instancias, un buen camino de búsqueda resultará en volver a visitar una solución encontrada anteriormente. El objetivo más general es continuar estimulando el descubrimiento de nuevas soluciones de alta calidad.

### 3.4. Período Tabú

El uso de la memoria basada en lo reciente que aparece en la literatura con mayor frecuencia se gestiona mediante la creación de una o varias listas tabú. Estas listas almacenan los atributos tabú-activos e identifican, explícita o implícitamente, estados tabú actuales. El período tabú puede ser diferente para diferentes tipos o combinaciones de atributos, y con un mayor nivel de desarrollo, pueden variar también sobre diferentes estados del proceso de búsqueda. Estas variaciones del período tabú de los atributos hace posible crear diferentes formas de balance entre las estrategias de memoria a corto y a largo plazo.

Por lo tanto, para determinar cuándo son aplicables determinadas restricciones tabú, obtenidas a partir de los estados tabú de determinados atributos, es necesario disponer de funciones de memoria que permitan almacenarlos eficaz y eficientemente. Dos ejemplos de funciones de memoria basadas en lo reciente, usadas frecuentemente en la literatura, se especifican mediante los vectores  $ComienzoTabu(e)$  y  $FinTabu(e)$ , donde  $e$  varía sobre atributos relevantes a una aplicación particular. Estos vectores identifican, respectivamente, las iteraciones de comienzo y finalización del período tabú para el atributo  $e$ , acotando así el período durante el cual  $e$  es tabú-activo.

La regla para identificar valores apropiados para  $ComienzoTabu(e)$  y  $FinTabu(e)$  resulta de mantener los atributos en cada iteración que son componentes del movimiento actual. En particular, en la iteración  $i$ , si  $e$  es un atributo del movimiento actual, se define un estado tabú para evitar inversiones. Entonces  $ComienzoTabu(e) = i + 1$ , indicando que el atributo inverso  $\bar{e}$  comienza su estado tabú-activo al comienzo de la siguiente iteración. El atributo  $\bar{e}$  mantendrá este estado a lo largo de su período tabú, que denotamos por  $t$ . Esto produce  $FinTabu(e) = i + t$ , tal que el período para  $\bar{e}$  se extiende sobre las  $t$  iteraciones de  $i + 1$  a  $i + t$ .

Como resultado, es fácil comprobar si un atributo arbitrario es activo, simplemente controlando si  $FinTabu(e) \geq IteracionActual$ . Inicializando  $FinTabu(e) = 0$  para todos los atributos nos aseguramos de que  $FinTabu(e) < IteracionActual$ , y por lo tanto que el atributo  $e$  es tabú-

inactivo, hasta que se realice la actualización especificada previamente. Esto sugiere que necesitamos mantener sólo un único vector  $FinTabu(e)$  para proporcionar información sobre el estado tabú. Sin embargo, veremos que surgen situaciones en las que es valioso mantener  $ComienzoTabu(e)$ , e inferir  $FinTabu(e)$  añadiendo un valor apropiado de  $t$  (computado actualmente, o preferiblemente extraído de una secuencia pre-almacenada), o mantener  $FinTabu(e)$  como un vector separado.

Independientemente de la estructura de datos usada, la cuestión clave para crear el estado tabú usando memoria basada en lo reciente es determinar un “buen valor” de  $t$  o período tabú. Se ha demostrado empíricamente que un buen valor de período tabú depende del tamaño del ejemplo de problema que se aborda. Sin embargo, no se ha diseñado ninguna regla estándar que determine un período tabú efectivo para todas las clases de problemas, en parte porque un período tabú apropiado depende de la regla de activación tabú usada. Para una determinada clase de problemas es relativamente sencillo determinar períodos tabú y reglas de activación adecuadas mediante experimentación. Es posible reconocer que un período tabú es muy pequeño para una clase de problemas cuando se detectan repetitivos valores de la función objetivo, lo cual sugiere la aparición de ciclado en el proceso de búsqueda. De la misma forma, se detecta que un período tabú es muy grande cuando se produce un deterioro en la calidad de las soluciones encontradas. Es posible, por tanto, establecer un rango de períodos intermedios para obtener un buen comportamiento de la búsqueda. Una vez obtenido este rango de períodos tabú, un modo de proceder es seleccionar diferentes valores del rango en iteraciones diferentes.

Los elementos de la memoria a corto plazo mencionados hasta el momento, combinados con consideraciones de memoria a largo plazo, que se discutirán con más detalle en la siguiente sección, hacen de la búsqueda tabú un método con gran poder. Sin embargo, tal como podemos comprobar a partir de muchas de las aplicaciones que aparecen en la literatura, el enfoque inicial de memoria a corto plazo por sí mismo es capaz de generar soluciones de alta calidad.

Las reglas para determinar el período tabú,  $t$ , se clasifican en estáticas y dinámicas (Figura 17). Las reglas estáticas eligen un valor para  $t$  que se mantiene fijo a lo largo de la búsqueda. Las reglas dinámicas permiten que el valor de  $t$  varíe. La variación del período tabú durante el proceso de búsqueda proporciona un método efectivo para inducir un balance entre examinar una región en detalle y mover la búsqueda hacia regiones del espacio diferentes.

---

### Reglas Ilustrativas para Crear Período Tabú (Basado en lo Reciente)

**Reglas Estáticas** Elegir  $t$  como una constante tal que  $t = 7$  o  $t = \sqrt{n}$ , donde  $n$  es una medida de la dimensión del problema.

#### Reglas Dinámicas

**Dinámico Simple:** Elegir  $t$  para variar (aleatoriamente o mediante un patrón sistemático) entre cotas  $t_{min}$  y  $t_{max}$ , tal que  $t_{min} = 5$  y  $t_{max} = 7$  o  $t_{min} = ,9\sqrt{n}$  y  $t_{max} = 1,1\sqrt{n}$ .

**Dinámico Atributo Dependiente:** Elegir  $t$  como en la regla dinámica simple, pero determinar  $t_{min}$  y  $t_{max}$  para ser mayores para aquellos atributos que son más atractivos; por ejemplo, basados en consideraciones de calidad o de influencia.

---

Figura 17: Reglas Ilustrativas para Crear Período Tabú.

Los valores indicados, tales como 7 y  $\sqrt{n}$ , son sólo para propósitos ilustrativos, y representan



parámetros cuyos valores preferidos deberían ser establecidos mediante experimentación para una clase particular de problemas, tal como hemos indicado anteriormente. En ocasiones, es apropiado permitir que diferentes tipos de atributos definiendo una restricción tabú tengan diferentes valores de período tabú. Por ejemplo, algunos atributos pueden contribuir más fuertemente a una restricción tabú que otros, y debería asignárseles un período tabú más pequeño para impedir hacer la restricción demasiado severa.

Para ilustrarlo, consideremos el problema de identificar un subconjunto óptimo de  $m$  ítems de un conjunto mucho mayor de  $n$  ítems. Supongamos que cada movimiento consiste en intercambiar uno o un número pequeño de ítems en el subconjunto con un número igual fuera del subconjunto, para crear un nuevo subconjunto de  $m$  ítems. Además de esto, supongamos también que se usa una restricción tabú para prohibir un movimiento si contiene un ítem añadido recientemente o recientemente eliminado, donde el período tabú proporciona el significado de recientemente.

Si el período para ítems añadidos o eliminados es el mismo, la restricción anterior puede ser muyladeada. En particular, cuando otros factores son iguales, evitar eliminar ítems del subconjunto es mucho más restrictivo que evitar que sean añadidos ítems que no están en el mismo, dado que hay menos contenido que en el subconjunto exterior. Además, evitar que elementos añadidos al subconjunto sean eliminados por un tiempo relativamente largo puede inhibir significativamente las opciones disponibles y, por lo tanto, el período para estos elementos debería ser pequeño en comparación al período para evitar que sean añadidos elementos eliminados del subconjunto, usando reglas estáticas o dinámicas.

### 3.5. Criterios de Aspiración

Otro de los elementos fundamentales que permite al método de búsqueda tabú alcanzar sus mejores niveles de ejecución es la introducción de los criterios de aspiración durante el proceso de búsqueda. Los criterios de aspiración se introducen para determinar cuándo se pueden reemplazar las restricciones tabú, eliminando así la clasificación tabú aplicada a un movimiento. Aunque gran parte de las aplicaciones que encontramos en la literatura emplean únicamente un tipo simple de criterio de aspiración, que consiste en eliminar una clasificación tabú de un movimiento de ensayo cuando el movimiento conduce a una solución mejor que la mejor obtenida hasta ahora, hay otros criterios de aspiración efectivos para mejorar la búsqueda.

Una base para uno de estos criterios surge al introducir el concepto de *influencia*, que mide el grado de cambio inducido en la estructura de la solución o en la factibilidad. Esta noción puede ser ilustrada para el problema de distribuir objetos desigualmente pesados entre cajas, donde el objetivo es dar a cada caja aproximadamente el mismo peso. Un movimiento de alta influencia, que cambia significativamente la estructura de la solución actual, se ejemplifica mediante un movimiento que transfiera un objeto muy pesado de una caja a otra. Tal movimiento puede no mejorar la solución actual, siendo menos probable conducir a una mejora cuando la solución actual sea relativamente buena. Se realizarán movimientos de baja influencia mientras existan posibilidades de mejora significantes. En el momento en el que se carezca de movimientos de mejora, los criterios de aspiración cambian para dar un mayor peso a los movimientos influyentes. Además, una vez que se ha realizado un movimiento influyente, cabe pensar que nos hemos desplazado a una región diferente del espacio de búsqueda y, por tanto, deberían eliminarse las restricciones tabú establecidas previamente para movimientos menos influyentes. Estas consideraciones de influencia de

movimiento interactúan con consideraciones de región y dirección de búsqueda.

Distinguimos entre *aspiraciones de movimiento* y *aspiraciones de atributo*. Cuando se satisface una aspiración de movimiento, se revoca la clasificación tabú del movimiento. De la misma forma, cuando se satisface una aspiración de atributo, se revoca el estado tabú-activo del atributo. En el último caso el movimiento principal puede no cambiar su clasificación tabú, dependiendo de si la restricción tabú se activa a partir de más de un atributo.

Los siguientes criterios determinan la admisibilidad de una solución ensayo,  $xEnsayo$ , como un candidato a ser considerado, donde  $xEnsayo$  es generado por un movimiento que ordinariamente sería clasificado tabú.

### Criterios de Aspiración Ilustrativos

**Aspiración por Defecto:** Si todos los movimientos disponibles están clasificados tabú, y no se han hecho admisibles mediante algunos otros criterios de aspiración, entonces se selecciona el movimiento “menos tabú”. (Por ejemplo, seleccionamos un movimiento que pierda su clasificación tabú por el menor incremento en el valor de *IteraciónActual*, o por una aproximación a esta condición).

**Aspiración por objetivo:**

*Forma Global:* Se satisface una aspiración de movimiento, permitiendo que  $xEnsayo$  sea un candidato para la selección, si  $c(xEnsayo) < MejorCoste$ .

*Forma Regional:* Subdividimos el espacio de búsqueda en regiones  $R \subseteq X$ , identificadas mediante cotas sobre los valores de funciones  $g(x)$  (o por intervalos de tiempo de búsqueda). Denotemos por  $MejorCoste(R)$  el mínimo  $c(x)$  encontrado en  $R$ . Entonces para  $xEnsayo \in R$ , se satisface una aspiración de movimiento (para moverse hacia  $xEnsayo$ ) si  $c(xEnsayo) < MejorCoste(R)$ .

**Aspiración por Dirección de Búsqueda:** Sea  $direccion(e) = mejora$  si el movimiento más reciente conteniendo a  $\bar{e}$  fue un movimiento de mejora, y  $direccion(e) = nomejora$ , en otro caso. ( $direccion(e)$  y  $FinTabu(e)$  se fijan a sus valores actuales en la misma iteración). Se satisface una aspiración de atributo para  $e$  (haciendo a  $e$  tabú-inactivo) si  $direccion(e) = mejora$  y el movimiento ensayo actual es un movimiento de mejora, es decir, si  $c(xEnsayo) < c(xActual)$ .

**Aspiración por Influencia:** Sea  $influencia(e) = 0$  ó  $1$  según si el movimiento que establece el valor de  $ComienzoTabu(e)$  es un movimiento de baja influencia o un movimiento de alta influencia. ( $influencia(e)$  se fija a la vez que  $ComienzoTabu(e)$ ). Además, sea  $Ultima(L)$ , para  $L = 0$  ó  $1$ , igual a la iteración más reciente en la que fue realizado un movimiento de nivel de influencia  $L$ . Entonces una aspiración de atributo para  $e$  se satisface si  $influencia(e) = 0$  y  $ComienzoTabu(e) < Ultima(1)$ . Para múltiples niveles de influencia  $L = 0, 1, 2, \dots$ , la aspiración para  $e$  se satisface si hay un  $L > influencia(e)$  tal que  $ComienzoTabu(e) < Ultima(L)$ .

Las aspiraciones por Dirección de la Búsqueda y por Influencia proporcionan aspiraciones de atributos en vez de aspiraciones de movimientos. En la mayoría de los casos, las aspiraciones de

atributos y movimientos son equivalentes. Sin embargo, se emplean diversos medios para probar estas dos clases de aspiraciones.

### 3.5.1. Refinamientos de los Criterios de Aspiración

Algunas mejoras de los criterios ilustrados anteriormente proporcionan una oportunidad para realzar la potencia de la búsqueda tabú para aplicaciones que son más complejas, o que ofrecen una recompensa por soluciones de muy alta calidad. En lo que sigue identificamos algunas de las posibilidades para alcanzar esto.

La creación de un estado tabú que varíe por grados, más que simplemente señalar un atributo para ser tabú-activo o tabú-inactivo, conduce a un refinamiento adicional de Aspiración por Dirección de Búsqueda y Aspiración por Influencia. El estado tabú graduado está implícito en las variantes probabilísticas de la búsqueda tabú, donde el estado se expresa como una función de cómo un atributo se ha convertido recientemente o frecuentemente en tabú-activo y tabú-inactivo. Sin embargo, para emplear esta idea de realzar los criterios de aspiración precedentes, creamos un único estado tabú intermedio que cae entre los dos estados de tabú-activo y tabú-inactivo. En particular, cuando se satisface una aspiración para un atributo que en otro caso es tabú-activo, lo llamamos atributo tabú pendiente.

Un movimiento que sería clasificado tabú si sus atributos tabú pendientes fueran tratados como tabú-activos, pero que no sería clasificado tabú en otro caso, es llamado movimiento tabú pendiente. Un movimiento tabú pendiente puede ser tratado en uno de dos modos. En el enfoque menos restrictivo, tal movimiento no se previene de ser seleccionado, pero su estado cambia de tal manera que sólo es candidato para selección si no existen movimientos de mejora excepto aquellos que son tabú. En el enfoque más moderado, un movimiento tabú pendiente debe ser, además, un movimiento de mejora para ser calificado para selección.

*Aspiración por Admisibilidad Fuerte.* Las nociones precedentes conducen a un tipo adicional de aspiración. Definimos un movimiento como fuertemente admisible si:

- (1) es admisible para ser seleccionado y no confía en criterios de aspiración para calificar para admisibilidad, o
- (2) califica para admisibilidad basado en la Aspiración Global por Objetivo, satisfaciendo  $c(x_{Ensayo}) < MejorCoste$ .

---

**Aspiración por Admisibilidad Fuerte:** Sea  $UltimaNomejora$  igual a la iteración más reciente en la que fue realizado un movimiento de no mejora, y sea  $UltimaFuertementeAdmisible$  igual a la iteración más reciente en la que fue realizado un movimiento fuertemente admisible. Entonces, si  $UltimaNomejora < UltimaFuertementeAdmisible$ , re-clasificamos cada movimiento tabú de no mejora como un movimiento tabú pendiente (permitiendo por tanto que sea un candidato para selección si no existe otro movimiento de mejora).

---

La desigualdad  $UltimaNomejora < UltimaFuertementeAdmisible$  de la condición de aspiración precedente implica, por un lado, que se ha realizado un movimiento de mejora fuertemente

admisible desde el último movimiento de no mejora y, por otro lado, que actualmente la búsqueda está generando una secuencia de mejora.

Este tipo de aspiración asegura que el método siempre procederá a un óptimo local siempre que se cree una secuencia de mejora que contenga al menos un movimiento fuertemente admisible. De hecho, la condición (2) que define un movimiento fuertemente admisible puede ser eliminada sin alterar este efecto, dado que una vez que se usa el criterio  $c(xEnsayo) < MejorCoste$  para justificar una selección de movimiento, entonces continuará siendo satisfecho por todos los movimientos de mejora en iteraciones subsiguientes hasta que se alcance un óptimo local.

### 3.5.2. Consideraciones Especiales para la Aspiración por Influencia

El criterio de Aspiración por Influencia puede ser modificado para crear un impacto considerable sobre su efectividad para ciertos tipos de aplicaciones. La afirmación de esta aspiración deriva de la observación de que un movimiento característicamente es influyente en virtud de contener uno o más atributos influyentes. Bajo tales condiciones, es apropiado considerar niveles de influencia definidos sobre los atributos, expresado por  $influencia(e)$ . En otros casos, sin embargo, un movimiento puede derivar su influencia de la combinación única de los atributos involucrados, y entonces la Aspiración por Influencia preferiblemente transforma una aspiración de movimiento en vez de una aspiración de atributo.

Más significativamente, en muchas aplicaciones, la influencia depende de una forma de conectividad, haciendo a sus efectos ser expresados principalmente sobre un rango particular. Llamaremos a este rango *esfera de influencia* del movimiento o atributo asociado. Por ejemplo, en el problema de distribución de objetos entre cajas, un movimiento que intercambia objetos entre dos cajas tiene una esfera de influencia relativamente estrecha, afectando sólo a aquellos movimientos futuros que transfieran un objeto dentro o fuera de una de estas dos cajas. Por consiguiente, bajo tales circunstancias, la Aspiración por Influencia debería estar limitada a modificar el estado tabú de atributos o la clasificación tabú de los movimientos que caen dentro de una esfera de influencia asociada. En el ejemplo de intercambiar objetos entre cajas, los atributos hechos tabú-inactivo deberían ser restringidos a *DesdeAtributos*, asociados con mover un objeto fuera de una de las dos cajas y *HaciaAtributos*, asociados con mover un objeto dentro de una de estas cajas. El cambio del estado tabú continúa dependiendo de las condiciones conocidas previamente. La influencia del atributo (o movimiento que lo contenga) debe ser menor que la de un movimiento anterior, y la iteración para el atributo debe preceder a la iteración sobre la cual ocurrió el movimiento influyente anterior. Estas condiciones pueden ser registradas colocando un indicador para  $ComienzoTabu(e)$  cuando se ejecuta el movimiento influyente, sin tener que comprobar otra vez para ver si  $e$  es afectado por tal movimiento. Cuando a  $ComienzoTabu(e)$  se le reasigna un nuevo valor, el indicador es eliminado.

Como sugieren las observaciones precedentes, son extremadamente importantes las medidas de la influencia del movimiento y las caracterizaciones asociadas de esferas de influencia. Además, debería notarse que la influencia puede ser expresada como una función de los componentes de la memoria de la búsqueda tabú, como cuando un movimiento que contiene atributos que no han sido ni frecuentemente ni recientemente tabú-activos puede ser clasificado como más altamente influyente (porque ejecutar el movimiento cambiará el estado tabú de estos atributos más radicalmente). Esto fomenta una definición dinámica de la influencia, la cual varía según el estado actual de la búsqueda.

## 4. Fundamentos de la Búsqueda Tabú: Memoria a largo plazo

En algunas aplicaciones, los componentes de la memoria a corto plazo son suficientes para producir soluciones de alta calidad. Sin embargo, tal como hemos mencionado anteriormente, la inclusión de la memoria a largo plazo, así como de las estrategias asociadas a la misma hacen de la búsqueda tabú una estrategia más fuerte. En las estrategias de memoria a largo plazo, los entornos modificados de las soluciones actuales pueden contener soluciones que no estén en el entorno original. Generalmente, se incluyen soluciones élite encontradas durante el proceso de búsqueda.

### 4.1. Memoria Basada en Frecuencia

La memoria basada en frecuencia proporciona un tipo de información que complementa la información proporcionada por la memoria basada en lo reciente, ampliando la base para seleccionar movimientos preferidos. Al igual que sucede en la memoria basada en lo reciente, la frecuencia a menudo está ponderada o descompuesta en subclases teniendo en cuenta las dimensiones de calidad de la solución e influencia del movimiento.

Concebimos medidas de frecuencia como proporciones, cuyos numeradores representan contadores del número de ocurrencias de un evento particular (por ejemplo, el número de veces que un atributo particular pertenece a una solución o movimiento) y cuyos denominadores generalmente representan uno de cuatro tipos de valores: (1) el número total de ocurrencias de todos los eventos representados por los numeradores (tal como el número de iteraciones asociadas), (2) la suma de los numeradores, (3) el máximo valor del numerador, y (4) la media del valor del numerador. Los denominadores (3) y (4) dan lugar a lo que se puede llamar frecuencias relativas. En los casos en los que los numeradores representan cuentas ponderadas, algunas de las cuales pueden ser negativas, los denominadores (3) y (4) se expresan como valores absolutos y el denominador (2) se expresa como una suma de valores absolutos.

En el ejemplo de intercambiar objetos entre cajas, tal como indicamos anteriormente, los atributos *DesdeAtributos* están asociados con mover un objeto fuera de una de las dos cajas y los atributos *HaciaAtributos* están asociados con mover un objeto dentro de una de estas cajas. Denotemos por  $x(1), x(2), \dots, x(\text{IteracionActual})$  la secuencia de soluciones generadas en el momento presente del proceso de búsqueda, y denotemos por  $S$  una subsecuencia de esta secuencia de soluciones. Tomamos la libertad de tratar  $S$  como un conjunto además de como una secuencia ordenada. Los elementos de  $S$  no son necesariamente elementos consecutivos de la secuencia de solución completa.

A modo de notación, denotemos por  $S(x_j = p)$  el conjunto de soluciones en  $S$  para las cuales  $x_j = p$ , y denotemos por  $\#S(x_j = p)$  la cardinalidad de este conjunto (el número de veces que  $x_j$  recibe el valor  $p$  sobre  $x \in S$ ). Análogamente, denotemos por  $S(x_j = p \text{ a } x_j = q)$  el conjunto de soluciones en  $S$  que resultan por un movimiento que cambia  $x_j = p$  a  $x_j = q$ . Finalmente, denotemos por  $S(\text{de } x_j = p)$  y  $S(\text{a } x_j = q)$  los conjuntos de soluciones en  $S$  que contienen respectivamente  $x_j = p$  como un *DesdeAtributo* o  $x_j = q$  como un *HaciaAtributo*. En general, si *AtributoSolucion* representa cualquier atributo de una solución que puede tomar el papel de un *DesdeAtributo* o un *HaciaAtributo* para un movimiento, y si *MovimientoAtributo* representa un atributo de movimiento arbitrario denotado por (*DesdeAtributo*, *HaciaAtributo*), entonces

$$S(\text{SolucionAtributo}) = \{x \in S: x \text{ contiene AtributoSolucion}\}.$$

$S(\text{MovimientoAtributo}) = \{x \in S: x \text{ resulta de un movimiento que contiene } \text{MovimientoAtributo}\}.$

$S(\text{DesdeAtributo}) = \{x \in S: x \text{ inicia un movimiento a } \text{DesdeAtributo}\}.$

$S(\text{HaciaAtributo}) = \{x \in S: x \text{ resulta de un movimiento que contiene a } \text{HaciaAtributo}\}.$

La cantidad  $\#S(x_j = p)$  constituye una *medida de residencia*, dado que identifica el número de veces que el atributo  $x_j = p$  reside en las soluciones de  $S$ . Correspondientemente, llamamos a la frecuencia que resulta de dividir tal medida por uno de los denominadores de (1) a (4) una *frecuencia de residencia*. Para el numerador  $\#S(x_j = p)$ , los denominadores (1) y (2) corresponden ambos a  $\#S$ , mientras que los denominadores (3) y (4) son dados respectivamente por  $\text{Max}(\#S(x_k = q) : \text{todo } k, q)$  y por  $\text{Media}(\#S(x_k = q) : \forall k, q)$ .

Las cantidades  $\#S(x_j = p \text{ a } x_j = q)$ ,  $\#S(\text{de } x_j = p)$  y  $\#S(\text{a } x_j = q)$  constituyen medidas de transición, dado que identifican el número de veces que  $x_j$  cambia de y/o a valores especificados. Asimismo, las frecuencias basadas en tales medidas son llamadas *frecuencias de transición*. Los denominadores para crear tales frecuencias de las medidas precedentes incluyen  $\#S$ , el número total de veces que los cambios indicados ocurren sobre  $S$  para diferentes valores  $j$ ,  $p$  y/o  $q$ , y cantidades *Max* y *Media* asociadas.

Las frecuencias de residencia y transición en ocasiones transmiten información relacionada. Sin embargo, aunque a veces son confundidas en la literatura, en general tienen implicaciones diferentes. Una distinción significativa es que las medidas de residencia, en contraste con las medidas de transición, no se refieren a si un atributo de solución particular de un elemento  $x(i)$  en la secuencia  $S$  es un *DesdeAtributo* o un *HaciaAtributo*, o incluso si es un atributo que cambia en movimiento de  $x(i)$  a  $x(i + l)$  o de  $x(i - l)$  a  $x(i)$ . Sólo es relevante que el atributo puede ser un *DesdeAtributo* o un *HaciaAtributo* en algún movimiento futuro. Tales medidas pueden conducir a diferentes tipos de implicaciones dependiendo de la elección de la subsecuencia de  $S$ .

Una frecuencia de residencia alta, por ejemplo, puede indicar que un atributo es altamente atractivo si  $S$  es una subsecuencia de soluciones de alta calidad, o puede indicar lo contrario si  $S$  es una subsecuencia de soluciones de baja calidad. Por otro lado, una frecuencia de residencia que es alta (baja) cuando  $S$  contiene tanto soluciones de alta como de baja calidad puede apuntar a atributo fortalecido (o excluido) que restringe al espacio de búsqueda, y que necesita ser desechado (o incorporado) para permitir diversidad.

Desde el punto de vista de la simplificación del cómputo, cuando  $S$  está formado por todas las soluciones generadas después de una iteración especificada, entonces puede mantenerse una medida de residencia actual y actualizada por referencia a valores del vector *ComienzoTabu*, sin la necesidad de incrementar un conjunto de contadores en cada iteración. Para un conjunto  $S$  cuyas soluciones no vienen de iteraciones secuenciales, sin embargo, las medidas de residencia se calculan simplemente poniendo una etiqueta sobre los elementos de  $S$ .

Las medidas de transición son generalmente bastante fáciles de mantener ejecutando actualizaciones durante el proceso de generación de soluciones (asumiendo que las condiciones que definen  $S$ , y los atributos cuyas medidas de transición son buscadas, se especifican con anterioridad). Esto resulta del hecho de que típicamente sólo se consideran relevantes unos pocos tipos de cambios de atributos para detectar cuándo una solución se reemplaza por la siguiente, y éstos pueden aislarse y registrados fácilmente. Las frecuencias del ejemplo de la sección 2.3 constituyen una instancia de frecuencias de transición que fueron mantenidas en esta manera simple. Su uso en este ejemplo, sin embargo, alentaba la diversidad aproximando el tipo de papel que las frecuencias de residencia son

usualmente mejor satisfechas para ser tomadas.

Como una distinción final, una frecuencia de transición alta, en contraste con una frecuencia de residencia alta, puede indicar que un atributo asociado es un “llenador excelente”, que cambia dentro y fuera de la solución para ejecutar una función de buen ajuste. Tal atributo puede ser interpretado como el opuesto de un atributo influyente, como se consideró anteriormente en la discusión de Aspiración de Influencia. En este contexto, una frecuencia de transición puede ser interpretada como una medida de volatilidad.

*Ejemplos de Usos de Medidas de Frecuencia.* A continuación se muestran ilustraciones de frecuencias de residencia y de transición. (Sólo se indican los numeradores, entendiéndose que los denominadores son proporcionados por las condiciones (1) a (4)).

---

## Ejemplos de Medidas de Frecuencia

### (Numeradores)

$$(F1) \#S(x_j = p)$$

$$(F2) \#S(x_j = p \text{ para algún } x_j)$$

$$(F3) \#S(\text{a } x_j = p)$$

$$(F4) \#S(x_j \text{ cambia}), \text{ es decir, } \#S(x_j \neq p \text{ a } x_j = p)$$

$$(F5) \sum_{x \in S(x_j=p)} c(x) / \#S(x_j = p)$$

$$(F6) \text{ Reemplazar } S(x_j = p) \text{ en (F5) con } S(x_j \neq p \text{ a } x_j = p)$$

$$(F7) \text{ Reemplazar } c(x) \text{ en (F6) con una medida de la influencia } S(x_j \neq p \text{ a } x_j = p)$$


---

La medida (F5) puede ser interpretada como el valor medio  $c(x)$  sobre  $S$  cuando  $x_j = p$ . Esta cantidad puede ser directamente comparada con otras medias o puede ser pasada a una medida de frecuencia usando denominadores tales como la suma o el máximo de estas medias.

Los atributos que tienen mayores medidas de frecuencia, como aquellos que tienen mayores medidas de lo reciente (es decir, que ocurrieron en soluciones o movimientos más cercanos al presente), pueden iniciar un estado tabú-activo si  $S$  está formado por soluciones consecutivas que finalizan con la solución actual. Sin embargo, la memoria basada en frecuencia típicamente encuentra su uso más productivo como parte de una estrategia de período más largo, la cual emplea incentivos además de restricciones para determinar qué movimientos son seleccionados. En tal estrategia, las restricciones se convierten en penalizaciones de evaluación, y los incentivos se convierten en mejoras de la evaluación, para alterar la base para calificar movimientos como atractivos o no atractivos.

Para ilustrarlo, a un atributo tal como  $x_j = p$  con una frecuencia de residencia alta le puede ser asignado un incentivo fuerte (“beneficio”) para servir como un *DesdeAtributo*, resultando por tanto en la elección de un movimiento que produce  $x_j \neq p$ . Tal incentivo es particularmente relevante en el caso donde  $ComienzoTabu(x_j \neq p)$  es pequeño, dado que este valor identifica la última iteración en que  $x_j \neq p$  sirvió como un *DesdeAtributo*, y por tanto descubre que  $x_j = p$  ha sido un atributo de cada solución desde entonces.

La memoria basada en frecuencia por tanto es usualmente aplicada introduciendo estados

tabú graduados, como un fundamento para definir valores de penalización e incentivos para modificar la evaluación de los movimientos. Existe una conexión natural entre este enfoque y el enfoque de memoria basada en lo reciente que crea estados tabú como una condición todo-o-ninguno. Si el período de un atributo en memoria basada en lo reciente está concebida como un umbral condicional para aplicar una penalización muy grande, entonces las clasificaciones tabú producidas por tal memoria pueden ser interpretadas como el resultado de una evaluación que se convierte fuertemente inferior cuando las penalizaciones están activadas. Es razonable anticipar que los umbrales condicionales deberían también ser relevantes para determinar los valores de penalizaciones y los incentivos en estrategias de período largo. La mayoría de las aplicaciones en el presente, sin embargo, usan un múltiplo lineal simple de una medida de frecuencia para crear un término de penalización o de incentivo.

## 4.2. Estrategias de Intensificación y Diversificación Simples

Las funciones de intensificación y diversificación en la búsqueda tabú ya están implícitas en muchas de las prescripciones anteriores, pero se convierten especialmente relevantes en procesos de búsqueda de período largo. Las estrategias de intensificación crean soluciones agresivamente estimulando la incorporación de “atributos buenos”. En el período corto esto consiste en incorporar atributos que han recibido las mayores evaluaciones por los enfoques y criterios descritos anteriormente, mientras que en el intermedio a largo período consiste en incorporar atributos de soluciones de subconjuntos élite seleccionados. Por otro lado, las estrategias de diversificación generan soluciones que incorporan composiciones de atributos significativamente diferentes a los encontrados previamente durante la búsqueda. Estos dos tipos de estrategias se contrapesan y refuerzan mutuamente de varias formas.

Examinamos formas simples de enfoques de intensificación y diversificación que hacen uso de memoria basada en frecuencia. Estos enfoques serán ilustrados por referencia a medidas de frecuencia de residencia, pero algunas observaciones similares se aplican al uso de medidas de transición, teniendo en cuenta características contrastantes notadas previamente.

Para una estrategia de diversificación elegimos  $S$  como un subconjunto significativo de la secuencia de solución completa; por ejemplo, la secuencia entera empezando con el primer óptimo local, o la subsecuencia formada por todos los óptimos locales. (Para ciertas estrategias basadas en medidas de transición,  $S$  puede estar formado por la subsecuencia que contiene cada sucesión intacta máxima de movimientos de no-mejora que inmediatamente siguen un óptimo local, concentrándose en  $S(\textit{HaciaAtributo})$  para estos movimientos).

Para una estrategia de intensificación elegimos  $S$  como un subconjunto pequeño de soluciones élite (óptimos locales de alta calidad) que comparten un gran número de atributos comunes, y en segundo lugar cuyos miembros pueden alcanzarse uno de otro mediante números de movimientos relativamente pequeños, independientes de si estas soluciones caen cerca la una de la otra en la secuencia de la solución. Por ejemplo, las colecciones de tales subconjuntos  $S$  pueden ser generadas por procedimientos de agrupamiento, seguido del uso de un enfoque de procesamiento paralelo para tratar cada  $S$  seleccionado por separado.

Para propósitos ilustrativos, supongamos que un movimiento actualmente bajo consideración incluye dos atributos de movimiento, denotados por  $e$  y  $f$ , los cuales pueden ser expresados como  $e = (eDesde, eHacia)$  y  $f = (fDesde, fHacia)$ . Proporcionamos reglas para generar una función



de penalización o incentivo,  $PI$ , basada en medidas de frecuencia de los atributos  $e$  y  $f$ , las cuales se aplican igualmente a estrategias de intensificación y diversificación. Sin embargo, la función  $PI$  crea una penalización para una estrategia (intensificación o diversificación) si y sólo si crea un incentivo para la otra. Para describir esta función, denotemos por  $f(eDesde)$  y  $f(eHacia)$ , etc., la medida de frecuencia para los *DesdeAtributos* y *HaciaAtributos* indicados, y denotemos por  $T_1, T_2, \dots, T_6$  umbrales positivos seleccionados, cuyos valores dependen del caso considerado.

---

**Funciones  $PI$  Ilustrativas de Penalización e Incentivo para *HaciaAtributos*.** Elegir  $PI$  como una función monótona no decreciente de una de las siguientes cantidades, donde  $PI$  es positiva cuando la cantidad es positiva, y es 0 en otro caso. ( $PI$  proporciona una penalización en una estrategia de diversificación y un incentivo en una estrategia de intensificación).

- (1)  $Min\{f(eHacia), f(fHacia)\} - T_1$
  - (2)  $Max\{f(eHacia), f(fHacia)\} - T_2$
  - (3)  $Media\{f(eHacia), f(fHacia)\} - T_3$
- 

**Funciones  $PI$  Ilustrativas de Penalización e Incentivo para *DesdeAtributos*.** Elegir  $PI$  como una función monótona no decreciente de una de las siguientes cantidades, donde  $PI$  es positiva cuando la cantidad es positiva, y es 0 en otro caso. ( $PI$  proporciona un incentivo en una estrategia de diversificación y una penalización en una estrategia de intensificación).

- (1)  $Min\{f(eDesde), f(fDesde)\} - T_4$
  - (2)  $Max\{f(eDesde), f(fDesde)\} - T_5$
  - (3)  $Media\{f(eDesde), f(fDesde)\} - T_6$
- 

Las condiciones precedentes para definir  $PI$  están relacionadas con las ilustradas previamente para identificar condiciones en las cuales los atributos se convierten en tabú-activos. Por ejemplo, especificando que (1) debe ser positivo para hacer  $PI$  positivo corresponde a introducir una penalización tabú (o un incentivo) cuando ambas medidas exceden sus umbrales comunes. Si una medida es expresada como la duración desde que un atributo fue el más recientemente hecho tabú-activo, y si el umbral representa un límite común para el período tabú, entonces (1) puede expresar una restricción basada en lo reciente para determinar una clasificación tabú. La asignación de diferentes umbrales a atributos diferentes en (1) corresponde a establecer períodos tabú atributo-dependientes. Análogamente, los restantes valores de (2) a (6) pueden ser interpretados como análogos a los valores que definen medidas basadas en lo reciente para establecer una clasificación tabú, implementada en este caso a través de una penalización.

De estas observaciones se concluye que la medida de frecuencia  $F$  puede extenderse para representar medidas combinadas de lo reciente y de lo frecuente. Note que la memoria basada en lo reciente, almacenando datos de *ComienzoTabu*, puede también referirse a cambios que han ocurrido más lejos en el pasado además de aquellos que han ocurrido más recientemente. Aunque estas medidas están ya implícitamente combinadas cuando se unen las penalizaciones y los incentivos basados en medidas de frecuencia con clasificaciones tabú basadas en medidas de lo reciente, como un fundamento para seleccionar movimientos actuales, es posible que otras formas de combinación

sean superiores.

### 4.3. Aspectos más avanzados de Intensificación y Diversificación

Los métodos de intensificación y diversificación que utilizan penalizaciones e incentivos representan sólo una clase de tales estrategias. Una colección mayor surge de la consideración directa de los objetivos de intensificación y diversificación. Examinamos diversos métodos que se han demostrado útiles en aplicaciones previas, e indicamos métodos que consideramos prometedores en aplicaciones futuras. Para empezar hacemos una distinción importante entre diversificación y aleatorización.

*Diversificación frente a aleatorización.* Cuando la búsqueda tabú busca una colección de soluciones diversas, es muy diferente de cuando busca una colección de soluciones aleatorias. En general, estamos interesados no sólo en colecciones diversas sino en secuencias diversas, dado que frecuentemente el orden en el que se examinan los elementos es importante en TS. Esto ocurre, por ejemplo, cuando buscamos identificar una secuencia de nuevas soluciones de forma que cada solución sucesiva sea *maximalmente* diversa en relación a todas las soluciones previamente generadas. Esto incluye posibles referencias a un conjunto base de soluciones, tales como  $x \in S$ , que da prioridad al objetivo de diversificación (es decir, donde el primer objetivo es establecer diversificación con respecto a  $S$ , y después con respecto a otras soluciones generadas). El concepto de diversificación se aplica también a la generación de una secuencia diversa de números o a un conjunto diverso de puntos entre los vértices del hipercubo unidad. Sea  $Z(k) = (z(1), z(2), \dots, z(k))$  una secuencia de puntos del conjunto  $Z$ . Por ejemplo,  $Z$  puede ser un intervalo lineal si los puntos son escalares. Tomamos  $z(1)$  como *punto semilla* de la secuencia. Entonces definimos  $Z(k)$  como una *secuencia dispersa* relativa a una métrica de distancia  $d$  elegida sobre  $Z$  requiriendo que cada subsecuencia  $Z(h)$  de  $Z(k)$ ,  $h \leq k$ , en todo punto asociado  $z = z(h+1)$  satisfaga las siguientes condiciones jerárquicas:

- (A)  $z$  maximiza la distancia mínima  $d(z, z(i))$  para  $i \leq h$ ;
- (B) sujeto a (A),  $z$  maximiza la distancia mínima  $d(z, z(i))$  para  $1 < i \leq h$ , para  $2 < i \leq h$ , etc. (en orden de prioridad estricto);
- (C) sujeto a (A) y (B),  $z$  maximiza la distancia mínima  $d(z, z(i))$  para  $i = h$ , para  $i = h - 1, \dots$ , y finalmente para  $i = 1$ . (Los empates pueden resolverse arbitrariamente.)

Para tratar la diversificación relativa a un conjunto base inicial  $Z^*$  (tal como un conjunto de soluciones  $x \in S$ ), la jerarquía precedente de condiciones se precede por una condición que estipula que  $z$  primero maximiza la mínima distancia  $d(z, z^*)$  para  $z^* \in Z^*$ . Una variante (más débil) útil de esta condición trata simplemente puntos de  $Z^*$  como si fueran los últimos elementos de la secuencia  $Z(h)$ .

Algunas variaciones sobre (A), (B) y (C), incluso profundizando en la jerarquía anterior (de-empates arbitrarios), son evidentemente posibles. Además, computacionalmente demandan ser satisfechas. Incluso omitiendo (B), y manteniendo sólo (A) y (C), si los elementos  $z(i)$  se refieren a puntos del hipercubo unidad, entonces según nuestro conocimiento actual, la única manera de generar una secuencia diversa de más de unos pocos puntos es ejecutar una enumeración comparativa. (No obstante, una secuencia dispersa de puntos en un intervalo lineal, particularmente si  $z(1)$  es un extremo o el punto medio del intervalo, se puede generar sin mucha dificultad). Con

una visión más amplia, el esfuerzo que requiere la generación de secuencias dispersas puede llevarse a cabo previamente e independientemente de los esfuerzos para resolver el problema, con lo que tales secuencias están precalculadas y disponibles cuando se necesiten.

*Refuerzo por restricción.* Uno de los primeros tipos de estrategias de intensificación, caracterizada en términos de explotar variables fuertemente determinadas y consistentes en [4], comienza seleccionando un conjunto  $S$  como indicado para determinar una penalización y una función de incentivo, es decir, un conjunto formado por soluciones élite agrupadas a través de una medida de clasificación. En vez de (o además de) crear penalizaciones e incentivos, con el objetivo de incorporar atributos a la solución actual que tenga altas medidas de frecuencia sobre  $S$ , el método de refuerzo por restricción opera estrechando el rango de posibilidades permitidas añadiendo y quitando tales atributos. Por ejemplo si  $x_j = p$  tiene una alta frecuencia sobre  $S$  sólo para un pequeño número de valores de  $p$ , entonces los movimientos se restringen permitiendo a  $x_j$  tomar sólo uno de estos atributos en la definición de un *HaciaAtributo*. Por tanto, si  $x_j$  es una variable 0-1 con una medida de frecuencia alta sobre  $S$  para uno de sus valores, entonces este valor se hará fijo una vez que exista un movimiento admisible que permita que se asigne dicho valor. Otras asignaciones pueden permitirse, por una variante de Aspiración por Defecto, si el conjunto actual de alternativas restringidas es inaceptable.

La consideración inicial sugiere que este método de restricción no ofrece nada más allá de las opciones disponibles por penalizaciones e incentivos. No obstante, el método puede conseguir más que esto por dos motivos. Primero, las restricciones explícitas pueden acelerar substancialmente la ejecución de los pasos de elección reduciendo el número de alternativas examinadas. Segundo, y más significativamente, muchos problemas se simplifican y colapsan una vez que se introducen un número de restricciones explícitas, permitiendo que las implicaciones estructurales salgan a la superficie, permitiendo que estos problemas se resuelvan más fácilmente.

El refuerzo por restricción no se limita a crear un efecto de intensificación. Dados energía y tiempo finitos para explorar alternativas, imponer restricciones a algunos atributos permite examinar más variantes de los restantes atributos que de otra manera. Por tanto, la intensificación con respecto a los elementos seleccionados puede realzar la diversificación sobre otros elementos, creando una forma de diversificación selectiva. Tal diversificación puede contrastarse con diversificación exhaustiva creada por las estructuras de memoria más rígidas de ramificación y acotación. En un ambiente donde el aspecto finito del esfuerzo de búsqueda disponible es proporcionado por el número de alternativas a ser exploradas exhaustivamente, la diversificación selectiva puede ser una contribución significativa a la búsqueda efectiva.

*Reencadenamiento de camino.* El reencadenamiento de camino (PR, *path relinking*) se inicia seleccionando dos soluciones  $x'$  y  $x''$  de una colección de soluciones élite producidas durante las fases de búsqueda. Se genera un camino desde  $x'$  a  $x''$ , produciendo una secuencia de soluciones  $x' = x'(1), x'(2), \dots, x'(r) = x''$  donde  $x'(i+1)$  se crea a partir de  $x'(i)$  en cada paso eligiendo un movimiento que deja el menor número de movimientos restantes hasta alcanzar  $x''$ . Finalmente, una vez que el camino esté completo, una o más de las soluciones  $x'(z)$  se seleccionan como soluciones para iniciar una nueva fase de búsqueda.

Este método proporciona un medio fundamental para perseguir el objetivo de intensificación y diversificación cuando sus pasos se implementan para explotar variantes estratégicas de reglas de elección. Un número de movimientos alternativos típicamente calificarán para producir la siguiente solución a partir de  $x'(i)$  por el criterio del “menor número de movimientos restantes”, permitiendo

consecuentemente una variedad de caminos posibles de  $x'$  a  $x''$ . Seleccionar movimientos no atractivos relativos a  $c(x)$  en cada paso tenderá a producir una serie final de movimientos de fuerte mejora, mientras que seleccionar movimientos atractivos tenderá a producir movimientos de menor calidad al final. (El último movimiento, no obstante, mejorará, o dejará  $c(x)$  sin cambiar, ya que  $x''$  es un mínimo local.) Por tanto, elegir el mejor, peor o movimiento medio, usando un criterio de aspiración para anular las elecciones en los dos últimos casos si está disponible una solución suficientemente atractiva, proporciona opciones que producen efectos contrastantes en la generación de la secuencia indicada. (Existen argumentos a favor de seleccionar el mejor movimiento en cada paso, y entonces repetir el proceso intercambiando  $x'$  y  $x''$ .)

La cuestión de una aspiración apropiada más amplia es relevante para seleccionar una  $x'(i)$  preferida para lanzar una nueva fase de búsqueda, y para terminar la secuencia más pronto. La elección de una o más soluciones  $x'(z)$  para lanzar una nueva fase de búsqueda debe depender preferiblemente no sólo de  $c(x'(i))$  sino también de los valores de  $c(x)$  de aquellas soluciones  $x$  que pueden alcanzarse por un movimiento a partir de  $x'(i)$ . En particular, cuando  $x'(i)$  se examina para moverse a  $x'(i+1)$ , se presentará un número de candidatos para  $x = x'(i+1)$  para su consideración.

Sea  $x^*(i)$  un vecino de  $x'(i)$  que proporciona un mínimo valor de  $c(x)$  durante un paso de evaluación, excluyendo  $x^*(i) = x'(i+1)$ . (Si las reglas de elección no eliminan automáticamente la posibilidad  $x^*(i) = x'(h)$  para  $h < i$ , entonces una simple restricción tabú puede usarse para esto). Entonces el método selecciona una solución  $x^*(i)$  que da el valor mínimo para  $c(x^*(i))$  como un nuevo punto para lanzar la búsqueda. Si sólo se examina un conjunto limitado de vecinos de  $x'(i)$  para identificar  $x^*(i)$ , entonces se puede seleccionar en su lugar un  $x'(i)$  de coste mínimo superior, excluyendo  $x'$  y  $x''$ . Una terminación temprana puede ser elegida al encontrar un  $x^*(i)$  que de  $c(x^*(i)) < \min\{c(x'), c(x''), c(x'(p))\}$ , donde  $x'(p)$  es el  $x'(h)$  de mínimo coste para todo  $h \leq i$ . (El procedimiento continúa sin parar si  $x'(i)$ , en contraste con  $x^*(i)$ , da un valor  $c(x)$  menor que  $x'$  y  $x''$ , ya que  $x'(i)$  adopta efectivamente el papel de  $x'$ .)

*Variaciones y Túneles.* Una variante del método PR empieza desde ambos extremos  $x'$  y  $x''$  simultáneamente, produciendo dos secuencias  $x' = x'(1), \dots, x'(r)$  y  $x'' = x''(1), \dots, x''(s)$ . Las elecciones se diseñan para provocar que  $x'(r) = x''(s)$  para los valores finales de  $r$  y  $s$ . Para progresar hacia este resultado cuando  $x'(r) \neq x''(s)$ , se selecciona  $x'(r)$  para crear  $x'(r+1)$ , mediante el criterio de minimizar el número de movimientos restantes hasta alcanzar  $x''(s)$ , o se selecciona  $x''(s)$  para crear  $x''(s+1)$ , mediante el criterio de minimizar el número de movimientos restantes hasta alcanzar  $x'(r)$ . De estas opciones se selecciona la que produzca el menor valor  $c(x)$ , determinando también si  $r$  o  $s$  se incrementa en el paso siguiente.

El método de re-encadenamiento de camino se puede beneficiar de un procedimiento de efecto “túnel” que permita usar una estructura de entornos diferente que la de la fase de búsqueda estándar. En particular, frecuentemente es deseable permitir periódicamente movimientos para el reenlace de camino que normalmente se excluirían por crear infactibilidad. Esta práctica es menos susceptible de llegar a perderse en una región no factible que otras formas de permitir infactibilidad periódica, ya que evidentemente la factibilidad se vuelve a recuperar al llegar a  $x''$ . El efecto túnel creado ofrece la oportunidad para alcanzar soluciones que de otra forma se pasarían por alto. En la variante que empieza desde  $x'$  y  $x''$ , algunas de las soluciones de  $x'(r)$  o  $x''(s)$  deben mantenerse factibles.

El re-encadenamiento de camino se puede organizar para poner más énfasis en la intensificación o diversificación optando por que  $x'$  y  $x''$  compartan más o menos atributos. Análogamente la elección de  $x'$  y  $x''$  de un conjunto clasificado de soluciones élite estimulará la intensificación, mientras que

elegirlas de conjuntos ampliamente separados estimulará la diversificación.

*Re-encadenamiento extrapolado.* Una extensión del método del re-encadenamiento de camino, que llamamos *re-encadenamiento extrapolado*, va más allá del punto extremo  $x''$  (o alternativamente  $x'$ ), para obtener soluciones que se expanden a una región mayor. La habilidad para continuar más allá de este extremo resulta de un método para aproximarse al criterio de selección de movimientos, especificado por el método estándar del re-encadenamiento de camino, que busca la próxima solución que deja el menor número de movimientos restantes para alcanzar  $x''$ . Específicamente, sea  $A(x)$  el conjunto de atributos de solución en  $x$ , y sea  $A_{drop}$  el conjunto de atributos de solución que se sacan por los movimientos ejecutados para alcanzar la solución actual  $x'(i)$ , es decir, los atributos que han servido como *DesdeAtributos* en estos movimientos. Entonces buscamos un movimiento en cada paso que maximice el número de *HaciaAtributos* que pertenecen a  $A(x'') - A(x'(i))$ , y sujeto a ello que minimice el número de los que pertenecen a  $A_{drop} - A(x'')$ . Tal regla generalmente puede implementarse muy eficientemente, a través de estructuras de datos limitando el examen de movimientos a aquellos que contienen *HaciaAtributos* de  $A(x'') - A(x'(i))$  (o permitiendo que estos movimientos se examinen antes que otros).

Una vez que se alcanza  $x'(r) = x''$ , el proceso continúa modificando la regla de elección de la siguiente forma. El criterio ahora selecciona un movimiento para maximizar el número de *HaciaAtributos* fuera de  $A_{drop}$  menos el número de sus *HaciaAtributos* que están en  $A_{drop}$ , y sujeto a esto minimizar el número de sus *DesdeAtributos* que pertenecen a  $A(x'')$ . El camino entonces se detiene donde no quede elección que permita que el criterio de maximización sea positivo.

Para entornos que permitan elección de movimientos relativamente no restringida, este método produce una extensión más allá de  $x''$  que introduce nuevos atributos, sin reincorporar ningún antiguo atributo hasta que no quede ningún movimiento que satisfaga esta condición. La habilidad para ir más allá de los extremos  $x'$  y  $x''$  crea una forma de diversificación que no es accesible desde el camino que queda entre estos extremos. Al mismo tiempo, los puntos exteriores están influidos por la trayectoria que enlaza  $x'$  y  $x''$ .

*Soluciones evaluadas, pero no visitadas.* Las estrategias de intensificación y diversificación pueden beneficiarse del hecho de que un proceso de búsqueda genera información no sólo sobre las soluciones realmente visitadas, sino también acerca de soluciones adicionales evaluadas durante el examen de los movimientos no adoptados. Una manifestación de esto es explotada en referencia a las soluciones  $x^*(i)$  en el método de re-encadenamiento de camino. Desde un punto de vista diferente, sea  $S^*$  un subconjunto de soluciones evaluadas, pero no visitadas (es decir, tomadas de la secuencia  $x(1), \dots, x(\text{iteracionactual})$  cuyos elementos  $x$  dan valores  $c(x)$  dentro de una banda de atracción elegida). Es relativamente fácil mantener un contador tal como  $\#S^*(x_j = p)$ , que identifica el número de veces que  $x_j = p$  es un *HaciaAtributo* de un intento de movimiento que lleva a una solución de  $S^*$ . Tal contador puede diferenciarse aún más estipulando que el movimiento probado debe ser de mejora, y de alta calidad relativa a otros movimientos examinados en la misma iteración. Entonces a un atributo que alcanza una frecuencia relativamente alta sobre  $S^*$ , pero que tiene una baja frecuencia de residencia sobre las soluciones realmente visitadas, se le da un incentivo para incorporarlo a futuros movimientos, sirviendo simultáneamente para los objetivos de intensificación y diversificación. Lo reciente y lo frecuente interactúan en este método separando el incentivo si el atributo ha sido seleccionado en un movimiento reciente.

*Penalizaciones e incentivos específicos de intervalo.* Un ajuste útil de las ideas precedentes extiende la filosofía de la Aspiración por Dirección de Búsqueda y Aspiración por Admisibilidad

Fuerte. Por estos criterios de aspiración, los movimientos de mejora se pueden escapar de la clasificación tabú bajo ciertas condiciones, pero con el resultado de rebajar su estado de tal manera que sean tratados como movimientos de mejora inferiores. Una extensión de esto preserva la distinción mejora/no-mejora cuando se introducen las penalizaciones e incentivos que no se pretende que sean preventivos. Para esta extensión, las evaluaciones vuelven a dividirse en intervalos de mejora y no mejora. Las penalizaciones y los incentivos se dan con alcance limitado, degradando o realzando las evaluaciones dentro de un intervalo, pero sin alterar la relación entre las evaluaciones que caen en intervalos diferentes.

Los incentivos concedidos en base a la similitud de influencia se hacen sujetos a este desplazamiento restringido de las evaluaciones. Dado que un movimiento influyente usualmente no es de mejora en el entorno de un óptimo local, mantener la relación entre evaluaciones de diferentes intervalos implica que tales movimientos se seleccionarán sólo cuando no existan otros movimientos de mejora que los clasificados tabú. Pero los movimientos influyentes también tienen un efecto basado en lo reciente. Sólo la ejecución de un movimiento de alta influencia puede cancelar la clasificación tabú de un movimiento de menor influencia sobre una serie de iteraciones, por lo que debería reducir o cancelar el incentivo para seleccionar otros movimientos influyentes por una duración correspondiente.

*Procedimientos de Listas de Candidatos.* Anteriormente, ya se ha destacado la importancia de los procedimientos para aislar un conjunto de movimientos candidatos de un entorno grande, para evitar el gasto computacional de evaluar todo el entorno. Algunos procedimientos de este tipo han sido utilizados en métodos de optimización desde que el tema de la reducción de los esfuerzos computacionales se ha tomado en serio (desde al menos los años 50 y probablemente antes). Algunas de las formas más estratégicas de estos problemas vienen del campo de la optimización de redes [10]. En tales métodos, el subconjunto de movimientos se referencia mediante una lista que identifica sus elementos definitorios (tales como índices de variables, nodos y arcos), y por tanto estos métodos han adquirido el nombre de *estrategias de listas de candidatos*.

Una forma simple de estrategia de lista de candidatos es construir una lista simple de elementos muestreando el entorno al azar, y repetir el proceso si el resultado se estima inaceptable. Este es el fundamento de los métodos de Monte Carlo. Sin embargo, algunos estudios de optimización de redes, sugieren que los procedimientos basados en diseños más sistemáticos producen resultados superiores. Generalmente, éstos incluyen la descomposición del entorno en subconjuntos críticos, y el uso de una regla que asegure que los subconjuntos no examinados en una iteración se planifiquen para ser examinados en iteraciones siguientes. Para los subconjuntos apropiadamente determinados, los mejores resultados se obtienen seleccionando los movimientos de máxima calidad de estos subconjuntos, bien examinando explícitamente todas las alternativas o usando un umbral adaptativo para identificar tales movimientos.

Otra clase de estrategias de listas de candidatos examina periódicamente porciones más grandes del entorno, creando una lista maestra de algún número de las mejores alternativas encontradas. La lista maestra se consulta entonces para identificar movimientos (derivados o relacionados con los almacenados) para iteraciones adicionales hasta que un umbral de aceptabilidad dispara la creación de una nueva lista maestra.

Las estrategias de listas de candidatos implícitamente tienen una influencia diversificante motivando que diferentes partes del espacio de entorno se examinen en diferentes iteraciones. Esto sugiere que debe beneficiarse de coordinar tales estrategias con otras estrategias de diversificación,

un área que permanece abierta a la investigación. Las estrategias de listas de candidatos también son muy naturales para procesos de paralelización, donde se examinan en paralelo formas de descomposición de entornos a examinar de forma secuencial. Los movimientos pueden seleccionarse eligiendo el mejor candidato por varios procesos, o en su lugar cada proceso puede ejecutar sus propios movimientos preferidos, generando trayectorias de soluciones paralelas que son periódicamente coordinadas a un nivel superior. Estos últimos procedimientos se mantienen considerablemente prometedores.

*Entornos compuestos.* La identificación de un entorno efectivo para definir los movimientos desde una solución a otra puede ser extremadamente importante. Por ejemplo, un intento de resolver un problema de programación lineal eligiendo los movimientos que incrementan o decrementan variables del problema, frente a elegir movimientos que usan procesos de pivotaje o direcciones de búsqueda, obviamente puede provocar una diferencia sustancial en la calidad de la solución final obtenida. Las innovaciones que han hecho a la programación lineal una potente herramienta de optimización dependen significativamente del descubrimiento de entornos efectivos para hacer los movimientos.

Para aplicaciones combinatorias donde las posibilidades para crear entornos están ampliamente confinadas a varios procesos constructivos o destructivos, o a intercambios, mejoran frecuentemente los resultados combinando entornos para crear movimientos. Por ejemplo, en aplicaciones de secuenciación generalmente es preferible combinar entornos consistentes en movimientos de inserción y movimientos de intercambio, permitiendo considerar ambos tipos de movimientos en cada paso. Otra forma de combinar entornos es generar movimientos combinatorios, donde una secuencia de movimientos simples es tratada como un solo movimiento más complejo.

Un tipo especial de método para crear movimientos compuestos resulta de una sucesión de pasos en los que un elemento es asignado a un nuevo estado, con la consecuencia de *expulsión* de algún otro elemento de su estado actual. El elemento expulsado se asigna a su vez a un nuevo estado, expulsando a otro elemento, y así sucesivamente, creando una cadena de tales operaciones. Por ejemplo, tales procesos ocurren en un problema de secuenciación de tareas al mover una tarea a una nueva posición ocupada por otra tarea, expulsando esta tarea de su posición. La segunda tarea entonces se mueve a una nueva posición expulsando aún otra tarea, y así sucesivamente. Finalmente se acaba por insertar la última tarea entre dos tareas que son actualmente adyacentes. Este tipo de método llamado, estrategia de expulsiones en cadena, incluye la expulsión de enlaces entre elementos (tales como tareas) más que expulsar los elementos en sí, y también se aplica a elementos agregados y a enlaces. Las estrategias de expulsiones en cadena tienen aplicaciones útiles en problemas de muchos tipos, particularmente en conexión con planificación, rutas, clasificación y partición [1], [7].

*Oscilación Estratégica.* El método de oscilación estratégica está estrechamente relacionado con los orígenes de la búsqueda tabú, y proporciona una técnica efectiva entre intensificación y diversificación para medio a largo plazo. La oscilación estratégica opera moviendo hasta chocar con una frontera, representada por la factibilidad o una etapa de construcción, que normalmente representaría un punto donde el método se pararía. En vez de parar, sin embargo, la definición de entorno se extiende o el criterio de evaluación para seleccionar movimientos se modifica para permitir que la frontera se cruce. El método entonces continúa por una profundidad especificada más allá de la frontera y luego vuelve. En este punto se vuelve a aproximar a la frontera y se cruza, esta vez en dirección opuesta, procediendo a un nuevo punto de giro. El proceso de acercarse repetidamente

y cruzar la frontera desde diferentes direcciones crea una forma de oscilación que da al método su nombre. El control sobre esta oscilación se establece generando evaluaciones modificadas y reglas de movimiento, dependiendo de la región en la que se está actualmente navegando y de la dirección de búsqueda. La posibilidad de recorrer de nuevo una trayectoria anterior se evita con los mecanismos tabú estándares.

Un ejemplo de este método ocurre para el problema de la mochila multidimensional, donde los valores de las variables 0-1 se cambian de 0 a 1 hasta que se alcanza la frontera de factibilidad. El método entonces continúa dentro de la región no factible usando el mismo tipo de cambios, pero con un evaluador modificado. Después de un número seleccionado de pasos, la dirección se invierte cambiando variables de 1 a 0. El criterio de evaluación conduce hacia la mejor variación (o la de menor empeoramiento) de acuerdo a si el movimiento es de más a menos o de menos a más factible (o no factible), y se acompaña por las restricciones asociadas sobre los cambios admisibles de valores en las variables. Una implementación de tal método de [2], [3] ha generado soluciones particulares de alta calidad para el problema de la mochila multidimensional.

Un tipo algo diferente de aplicación ocurre para el problema de encontrar un árbol generador óptimo sujeto a restricciones de desigualdad en un conjunto de aristas ponderadas. Un tipo de método de oscilación estratégica para este problema resulta de un proceso constructivo de añadir aristas a un árbol que crece hasta que es generador, y entonces continúa añadiendo aristas para cruzar la frontera definida por la construcción del árbol. Un grafo diferente se obtiene cuando la solución actual no es un árbol, y por tanto se requiere un entorno diferente, produciendo reglas modificadas de selección de movimientos. Las reglas cambian otra vez para proceder en la dirección contraria, quitando aristas hasta conseguir otra vez un árbol. En tales problemas, el esfuerzo requerido por diferentes reglas puede hacer preferible cruzar la frontera con diferente profundidad por diferentes sitios. Una opción es aproximarse y retirarse de la frontera mientras permanece a un solo lado, sin cruzar (es decir, eligiendo cruzar con profundidad 0). En este ejemplo, se pueden considerar otros tipos de frontera, derivados de las restricciones de desigualdad.

El uso de oscilación estratégica en aplicaciones que alternan procesos constructivos y destructivos puede acompañarse de movimientos de intercambio que mantienen la construcción a un determinado nivel. Un *principio de optimalidad aproximada*, que establece aproximadamente que buenas construcciones a un nivel son más probables de estar cerca de buenas construcciones a otro nivel, motiva una estrategia de aplicar intercambios a distintos niveles, a cada lado de una estructura blanco o diana tal como el árbol generador, para obtener construcciones refinadas antes de pasar a niveles adyacentes.

Finalmente, remarcamos que la frontera incorporada en la oscilación estratégica no necesita definirse en términos de factibilidad o estructura, pero puede definirse en términos de una región donde la búsqueda parece gravitar. La oscilación entonces consiste en obligar a la búsqueda a salir de esta región y permitirle volver.



## Apéndice. Elementos a considerar al implementar una Búsqueda Tabú.

Durante el proceso de diseño de un método de búsqueda tabú para una aplicación particular, puede resultar de utilidad plantearse algunas de las cuestiones que se listan en este apéndice. Durante la presentación de estas cuestiones haremos referencia, como bibliografía adicional al presente capítulo, a diversas secciones del libro “Tabu Search” (TS) [8], escrito por los profesores Fred Glover y Manuel Laguna en el año 1997. Para hacer alusión a sus capítulos, por ejemplo al capítulo 3, usaremos la notación TS(3). De la misma forma, para hacer alusión, por ejemplo a la sección 2 del capítulo 3, mostraremos TS(3.2).

Independientemente del método de búsqueda utilizado para resolver un problema particular, hay cuatro elementos comunes a todos ellos: (i) la representación de la solución, la cual permite generar estructuras de entorno adecuadas para el problema, (ii) un objetivo, (iii) una función de evaluación, y (iv) un mecanismo de movimiento, proporcionado por el método usado; búsqueda tabú en nuestro caso. En lo que sigue, mostramos la lista de cuestiones que es conveniente plantearse antes de comenzar el diseño de una búsqueda tabú.

1. *El tipo de entorno usado.* ¿Hay más de una posible estructura de entorno que pueda ser potencialmente relevante? Cuando la respuesta a la pregunta anterior es positiva, ¿pueden combinarse o alternarse los entornos de forma conveniente? ¿Es posible (y deseable) usar entornos que hayan surgido de la resolución de forma óptima de problemas relacionados o relajados? ¿Puede un entorno asociarse más libremente a la solución de un problema auxiliar o relajado? ¿En qué medida puede la estructura del problema actual ser explotada por la definición del entorno? (Ver TS(10.5), 351-352)
2. *Identificar los atributos de las soluciones.* Estos atributos, que se derivan de los movimientos determinados por las estructuras de entorno seleccionadas, en ocasiones toman la forma de “variables del problema”. Pueden ser acciones, decisiones, elementos asignados a determinadas localizaciones o períodos de tiempo, cantidades de artículos comprados o adquiridos, y así sucesivamente.

### Referente a la memoria a corto plazo basada en lo reciente

3. *Definición de los estados tabú relacionados con los atributos identificados en el punto 2.* Para aquellos movimientos que involucran el cambio de más de un atributo al mismo tiempo, cada atributo componente tiene asignado un estado tabú (por ejemplo, tal como hemos mencionado anteriormente en este capítulo, *tabú-activo* o *tabú-inactivo*). El número de iteraciones usadas para determinar la duración de un estado tabú-activo puede depender del atributo considerado, tal como se ha explicitado en el ejemplo de los dos últimos párrafos de la sección 3.4 de este capítulo.
4. La naturaleza del período tabú para los atributos de las soluciones (fija o dinámica), y la regla de decisión para inicializar o actualizar el período (aleatoria o sistemática) explicados en la sección 3.4 son otros dos de los elementos fundamentales en el diseño de la búsqueda tabú. El “Método de Ciclo Tabú”, descrito en TS(7.3.3) 241-244, constituye un ejemplo de estrategia dinámica, cuya eficacia ha sido demostrada recientemente.

5. Determinar el uso de los criterios de aspiración usados para eliminar estados tabú, explicados en la sección 3.5 de este capítulo. Para obtener información más completa sobre los mismos, se recomienda revisar TS(2.6) 50-54.

### Referente a la memoria a largo plazo

6. *Las estructuras y los usos hechos de la memoria basada en frecuencia.* Por ejemplo, ¿qué tipos de soluciones o movimientos proporcionan la base para aplicar esta memoria? ¿Almacena el proceso la frecuencia con la que aparecen determinados atributos en soluciones o movimientos élite? ¿Constituye la memoria de frecuencia de transición, tal como aquella que cuenta únicamente el número de veces que un atributo fue añadido para crear una solución élite, o es una frecuencia de residencia, que cuenta el número de soluciones (o soluciones élite) en las que ha estado presente un atributo? De forma similar, ¿hace uso el método de frecuencias relativas a soluciones mediocres o malas? Por último, ¿tiene la memoria basada en frecuencia un uso a corto plazo al igual que en su uso a largo plazo? Para obtener más información que permite dar respuesta a estas preguntas, véase TS(4.1) 94-94 y TS(4.7) 117-121.
7. *Estrategias usadas para la intensificación.* ¿Realiza el método un almacenamiento explícito de las soluciones élite y busca periódicamente explorar otras soluciones cercanas a éstas, o confía sobre todo en reforzar la elección de atributos que tienen una alta frecuencia por aparecer en soluciones buenas, tal como se determinaba en el punto 6? Para encontrar la respuesta a esta preguntas se puede consultar además TS(4.2) 96-98.
8. *Estrategias usadas para la diversificación.* ¿Usa el método una estrategia de multi-arranque para obtener diversificación, o usa periódicamente movimientos que guían la búsqueda hacia zonas alejadas de las regiones ya visitadas? Véase TS(4.3) 98-102 y las primeras partes de TS(5).
9. Uso de algunas estrategias fundamentales tales como oscilación estratégica, re-encadenamiento de caminos, proyección de memoria adaptativa, etc. ¿Se usa alguno de estos métodos como espina dorsal de la búsqueda? ¿Son invocados periódicamente en un papel combinado de intensificación/diversificación?
10. ¿Qué estructuras de datos pueden usarse para facilitar los elementos anteriores, incluyendo estructuras que almacenen información suficiente para permitir la rápida actualización de las evaluaciones de los movimientos en vez de recalcular las soluciones completamente? (TS(3.1) 59-61.)
11. Las estrategias de listas de candidatos, que proporcionan un modo para enfocar las reglas de decisión y reducir la computación global, constituyen también un elemento fundamental de la búsqueda tabú (TS(3.2) 61-67). Véase también el ejemplo completo de la sección 2.3 de este capítulo.

Nota: En algunos problemas relacionados con la planificación, los entornos que parecen ser los más fáciles y naturales son aquellos basados en procesos constructivos y destructivos, construyendo un plan paso a paso. En este caso, a menudo es útil un enfoque de búsqueda tabú multi-arranque para generar una nueva solución en cada paso. Sin embargo, en muchas aplicaciones en

las que un procedimiento constructivo o destructivo puede que no proporcione el enfoque más simple, pudiera resultar valioso el uso de otras estructuras de entorno, siguiendo las consideraciones del punto 1. (En los artículos 294 y 302 que aparecen en “Publications” de la página web <http://spot.colorado.edu/~glover>, se encuentran referencias sobre métodos de búsqueda tabú multi-arranque).

## Referencias

- [1] Dorndorf, U. y Pesch, E. (1994) “Fast Clustering Algorithms”, *ORSA Journal on Computing*, 6:2, 141-153.
- [2] Freville, A. y Plateau, G. (1986) “Heuristics and Reduction Methods for Multiple Constraint 0-1 Linear Programming Problems”, *European Journal of Operational Research*, 24, 206-215.
- [3] Freville, A. y Plateau, G. (1990) “Hard 0-1 multiknapsack test problems for size reduction methods”, *Invesstigacion Operativa*, 1, 251-270.
- [4] Glover, F. (1977) “Heuristics for Integer Programming Using Surrogate Constraints”, *Decision Science*, 8, 156- 166.
- [5] Glover, F. (1986) “Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence”, *Computers and Operations Research*, 5, 533-549.
- [6] Glover, F. y Laguna, M. (1993). Tabu Search. *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*, C. Reeves, ed., Blackwell Scientific Publishing, pp. 71-140.
- [7] Glover, F. (1996) “Ejection Chains, Reference Structures and Alternating Path Methods for Traveling Salesman Problems”, *Discrete Applied Mathematics*, 65, 223-253.
- [8] Glover, F. and Laguna, M. (1997). *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers.
- [9] Glover, F., Laguna, M. and Martí R. (2006) *Principles of Tabu Search*. To appear in *Approximation Algorithms and Metaheuristics*, Chapman & Hall/CRC.
- [10] Mulvey, J. (1978) “Pivot strategies for primal simplex network codes”, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 25, 266-270.